Favoriser les changements de cadres avec GeoGebra

Jana Lackova

Université de Genève

En guise d'introduction

On souhaite construire une boîte à partir d'une feuille de carton de format A4, en découpant des carrés aux quatre coins et en rabattant les bords restants. Calculez la dimension des carrés de sorte que la boîte ait le plus grand volume possible.

Dans cet article nous allons analyser deux façons d'aborder cette activité : dans un environnement papier-crayon et dans un environnement GeoGebra[1]. L'objectif est de voir comment l'utilisation de GeoGebra peut favoriser le changement de cadre (Douady, 1986) ou de registres de représentation sémiotique (Duval, 1993) et permettre aux élèves de résoudre des problèmes qui leur restent sinon bien souvent inaccessibles.

L'activité, si on veut la mener à bout dans un environnement uniquement papier-crayon, s'adresse à des élèves du secondaire 2 (élèves de 15-19 ans) en raison des outils d'analyse convoqués. On pourrait aussi envisager de la proposer avec une finalité moins ambitieuse, plus tôt dans la scolarité, dès que la notion de la fonction a été introduite. L'activité est en effet accessible dès le début du secondaire, mais on peut y associer des objectifs dont l'ambition augmente progressivement et représente à la fin un beau défi pour ceux qui veulent aller plus loin. Elle peut être mise en œuvre dans une classe hétérogène et favoriser ainsi la différenciation.

Quelques élements de didactique…

Selon Douady (1986) :

> *un cadre est constitué des objets d'une branche des mathématiques, des relations entre les objets, de leurs formulations éventuellement diverses et des images mentales associées à ces objets et ces relations. (p. 11)*

C'est dans ce sens que nous allons parler du cadre géométrique, du cadre de l'analyse ou du cadre algébrique.

Comme le met en avant Duval (1993), il est indispensable de pouvoir diversifier les représentations sémiotiques des objets mathématiques parce qu'ils « *ne sont pas directement accessibles dans la perception, ou dans une expérience intuitive immédiate, comme le sont les objets communément dit réels ou physiques !* » (p. 38). Selon lui, lors d'une activité mathématique, il importe de recourir à plusieurs registres de représentation sémiotique (un énoncé en langage naturel, une figure géométrique, une formule algébrique, une représentation graphique, etc.) ou de privilégier un registre plutôt qu'un autre. Le travail de Duval a mis en évidence l'importance pour la compréhension d'un concept mathématique de la capacité à identifier le même objet dans différents registres de représentation et à passer facilement de l'un à l'autre et vice-versa (ce qu'il appelle les conversions). Duval rappelle que cette coordination n'est pas spontanée et qu'il existe un certain cloisonnement des registres de représentation chez beaucoup d'élèves, ce qui mène à un travail à l'aveugle, sans pouvoir vérifier le sens du travail effectué. Nous allons illustrer avec cette activité comment GeoGebra peut favoriser l'articulation de cadres et de registres.

La bonne vieille boite

La résolution de l'activité de la boîte demande de bien articuler trois cadres différents (géométrique, algébrique et analytique). Dans la pratique, les problèmes d'optimisation se réduisent souvent à l'exécution d'une suite de tâches isolées, cantonnées dans un registre/cadre (souvent algébrique) qui ne favorise pas les passages de l'un à l'autre :

- Calculer le volume
- Ecrire la fonction
- Trouver sa dérivée
- Trouver les zéros de la dérivée
- Etc.

1 https://www.geogebra.org/about

Cependant, la résolution de ce problème fait appel à une modélisation[2] de niveau 3 (selon la classification établie par Dorier et Burgermeister (2013)) c'est-à-dire qu'un seul système est donné et la construction du second est à la charge des élèves. Ceci implique donc que les élèves doivent, au départ, opérer un changement de registre en transformant l'énoncé donné en langue naturelle en une figure géométrique (Figure 1). Ce premier travail mathématique constitue une source de blocage chez certains élèves pour qui ce changement de registre est difficile.

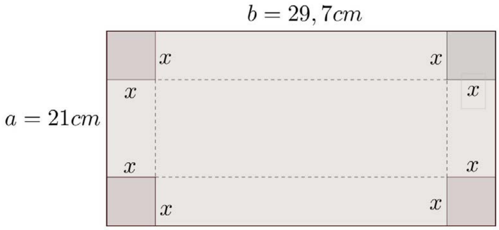

Figure 1

La Resolution classique

L'idée première est d'aller chercher le volume de la boite :

V = aire de la base x hauteur

En restant dans le cadre géométrique, les élèves peuvent commencer par calculer le volume en prenant différentes valeurs pour la longueur du côté à découper, et faire une première découverte : le volume varie. Une solution numérique approximative peut alors être envisagée par tâtonnement.

Cette piste-là peut par la suite les amener à changer de cadre pour avancer dans la résolution. C'est dans le cadre analytique que l'on peut écrire le volume de la boite en tant que fonction de la longueur du côté à découper.

$$V(x) = x(a-2x)(b-2x), \quad a \le b, \quad 0 < x < \frac{a}{2}$$

x : longueur du côté à découper ;

a : largeur du carton ;

b : longueur du carton.

2 *Modéliser signifie construire, discuter et étudier une correspondance entre deux (au moins) systèmes incluant des objets, des relations entre ces objets et des questions. (Dorier & Burgermeister, 2013, p. 12)*

Nous proposons ici la solution pour le cas général qui peut être adaptée, selon le niveau de la classe, en donnant des dimensions numériques.

$$V(x) = x(a-2x)(b-2x)$$
$$V(x) = (ax-2x^2)(b-2x)$$
$$V(x) = abx - 2ax^2 - 2bx^2 + 4x^3$$

$$V(x) = 4x^3 - 2(a+b)x^2 + abx$$

On doit trouver la dérivée de la fonction et en chercher les zéros :

$$V'(x) = 12x^2 - 4(a+b)x + ab$$
$$V'(x) = 0 \iff 12x^2 - 4(a+b)x + ab = 0$$
$$\Delta = 16(a+b)^2 - 48ab$$
$$x_{1,2} = \frac{4(a+b) \pm \sqrt{16(a+b)^2 - 48ab}}{24}$$
$$x_{1,2} = \frac{4(a+b) \pm 4\sqrt{(a+b)^2 - 3ab}}{24}$$
$$x_{1,2} = \frac{a+b \pm \sqrt{a^2 - ab + b^2}}{6}$$

Il reste à déterminer la valeur de x qui maximise le volume ce qui demande, pour le cas général, une bonne maîtrise des outils analytiques et des techniques algébriques.

Bien que la résolution de ce problème par la méthode classique nécessite d'effectuer un changement de cadre (du cadre géométrique au cadre analytique), les élèves travaillent principalement avec des représentations algébriques et se limitent ainsi au contexte sémiotique d'un seul registre.

LeMêmeproblemeavecl'aidedegeogebra

Le recours à GeoGebra permet de prendre en charge les manipulations algébriques et numériques. L'affichage simultané de différentes fenêtres (« Algèbre » et « Graphique » par exemple) favorise le travail dans plusieurs registres de représentation et leur articulation.

L'utilisation de ce logiciel aide aussi à explorer d'autres facettes du problème qui ne sont pas appréhendables avec l'approche classique et permet de proposer une approche différenciée selon les compétences des élèves.

A partir d'un document créé par l'enseignant avec le logiciel (Figure 2), les élèves choisissent différentes valeurs de **x** et voient apparaitre le volume de la boîte, ainsi que la représentation graphique de la trace correspondante[3]. Pour justifier de la justesse des résultats affichés par le logiciel et permettre aux élèves de comprendre l'origine des calculs, on peut envisager de les faire calculer une ou deux valeurs à la main.

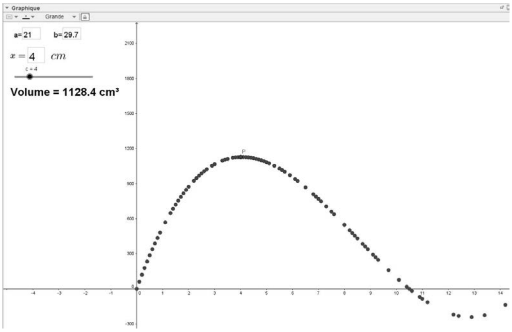

Figure 2

Le logiciel reste cependant un outil indispensable pour étudier les valeurs dans un nombre important de cas. Les élèves sont naturellement amenés à travailler dans le registre graphique et à visualiser que le volume varie, atteint un maximum et devient négatif à un moment donné (une belle source d'interrogation sur les limites du modèle !). Ils peuvent « jouer » avec les valeurs afin de trouver une approximation du volume maximal.

Comme le volume est modélisé par la fonction

$$V(x) = x(a-2x)(b-2x), \qquad a \le b, 0 < x < \frac{a}{2}$$

sa représentation graphique, dans le cas d'une feuille au format A4, est donnée dans la figure 3 où le point M est le maximum de la fonction V(x).

De plus, GeoGebra permet de créer les curseurs **a** et **b** représentant la longueur et la largeur de la feuille et de générer ainsi une famille de fonctions afin de recueillir des données pour explorer les effets des dimensions du carton sur la longueur du côté à découper qui maximise le volume (que l'on appellera $\mathbf{x}_{max}$). (Figure 4)

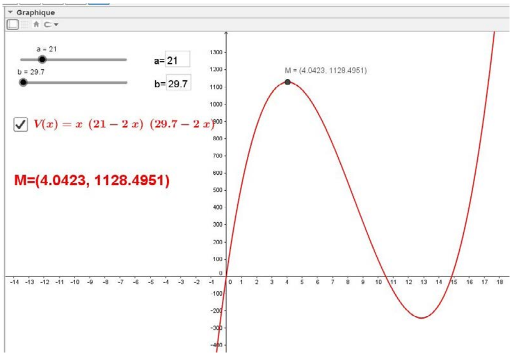

Figure 3

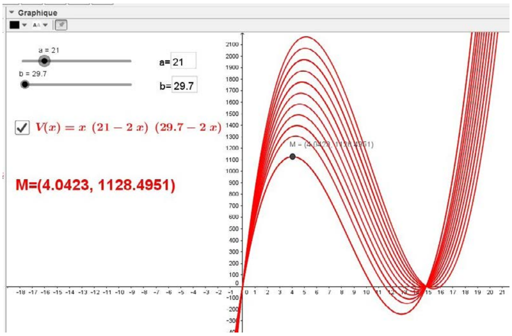

Figure 4

La stratégie en jeu ici consiste à choisir les valeurs et à organiser ses essais afin de chercher des « régularités[4] » en vue de formuler une conjecture sur $\mathbf{x}_{max}$.

Le cas du carton carré

Par exemple, nous choisissons de nous intéresser tout d'abord au cas spécifique du carré. Les curseurs **a** et **b** nous permettent de recueillir rapidement les données numériques ($\mathbf{x}_{max}$ et $\mathbf{V}(\mathbf{x}_{max})$) en changeant les valeurs de **a** et **b**, avec **a** = **b**. L'outil « calcul formel » nous donne leurs valeurs exactes sous forme fractionnaire. Le cas où **a** = **b** =1 est représenté à la figure 5.

Nous avons choisi de commencer par prendre des nombres entiers comme valeurs de **a** = **b** pour recueillir la valeur de $\mathbf{x}_{max}$ en écriture numérique arrondie et en écriture fractionnaire. Cette collection est organisée dans le Tableau 1(Colonnes 1 à 4).

3 *Lorsque les valeurs sont saisies dans le logiciel, la trace est automatiquement représentée graphiquement.*

4 *En anglais on les appelle « patterns and similarities »*

Calcul formel

1	V(x) $\rightarrow\ x\,(-2x+1)^2$
2	Extremum[V(x)] $\rightarrow \left\{\left(\frac{1}{6},\frac{2}{27}\right),\left(\frac{1}{2},0\right)\right\}$

Figure 5

a	b	x_{max}	x_{max}	x_{max}
1	1	0,167	1/6	1/6
2	2	0,333	1/3	2/6
3	3	0.5	1/2	3/6
4	4	0,667	2/3	4/6
5	5	0,833	5/6	5/6
6	6	1	1	6/6
7	7	1,167	7/6	7/6

Tableau 1

Pour permettre la formulation d'une éventuelle conjecture, mieux vaut choisir de travailler avec les valeurs en écriture fractionnaire plutôt que sous forme arrondie. Ici la clé est de réduire toutes les fractions au même dénominateur (Tableau 1, colonne 5). On peut ainsi observer une régularité : $\mathbf{x}_{max}$ semble être un sixième de la longueur de **a**. Jusque là nous n'avons pas utilisé d'outils d'analyse tels que la dérivée et, de ce fait, l'activité peut être utilisée pour travailler le concept de fonction.

Ce même résultat peut être facilement obtenu avec l'aide de l'outil « calcul formel » (Figure 6), à condition bien sûr que les élèves sachent recourir à l'outil dérivée en analyse.

5	V(x)=x(a-2x)^2 $\rightarrow\ \mathbf{V(x) = x\,(a-2x)^2}$
6	Dérivée[V(x) = x (a - 2x)²,x] $\rightarrow\ \mathbf{V'(x) = (a-2x)^2 - 4x\,(a-2x)}$
7	Résoudre[(a - 2x)² - 4x (a - 2x), x] $\rightarrow \left\{x=\frac{1}{2}\,a, x=\frac{1}{6}\,a\right\}$

Figure 6

Nous pouvons alors conclure que pour tous les cartons de forme carrée, la boîte au volume maximal est celle où la longueur du côté des quatre petits carrés découpés est égale à un sixième de la longueur du côté du carton.

Les cartons rectangulaires

On va maintenant s'intéresser aux cartons de forme rectangulaire. Que se passe-t-il si l'on garde le côté **a** fixe et l'on fait grandir **b** ?

Nous pouvons commencer par recueillir les données en gardant la valeur de **a** fixe et faisant varier la valeur de **b** (Tableau 2).

a	b	x_{max}	a	b	x_{max}
1	2	0,2113	2	2	0,3333
1	3	0,2257	2	3	0,3924
1	4	0,2324	2	4	0,4226
1	5	0,2362	2	5	0,4402
1	6	0.2387	2	6	0,4514
1	7	0,2404	2	7	0,4592
1	8	0,2417	2	8	0.4648
1	9	0.2427	2	9	0,4691
1	10	0,2434	2	10	0,4725

Tableau 2

Cette procédure est longue, et ne permet pas de formuler une conjecture à première vue.

Néanmoins, si on teste pour des valeurs de **b** assez grandes, on peut remarquer que les valeurs de $\mathbf{x}_{max}$ semblent stationner autour d'une certaine valeur (tableau 3).

1	80	0,2492	2	80	0,4968
1	99	0,2494	2	99	0,4974

Tableau 3

Nous pouvons alors explorer la valeur limite de $\mathbf{x}_{max}$ en prenant la valeur de **b**=1000 et en faisant varier **a** (Tableau 4). Bien que cette boîte n'ait plus de sens dans la réalité, elle nous permet néanmoins de tenter de formuler une conjecture.

a	b	x
1	1000	0,2499
2	1000	0,4997
3	1000	0,7494
4	1000	0,9990
5	1000	1,2484
6	1000	1,4977
7	1000	1,7469
8	1000	1,9960
9	1000	2,2449
10	1000	2,4937

Tableau 4

Pour les cartons de forme rectangulaire, la valeur de $\mathbf{x}_{max}$ semble stationner à la valeur 0,25**a** pour **b** suffisamment grand. Il faut néanmoins avoir un œil averti pour arriver à formuler une telle conjecture.

Ce qui suit nécessite que les élèves maitrisent bien l'outil dérivée en analyse, c'est toutefois un moyen de poursuivre cette activité en lançant un défi aux élèves de profil scientifique.

En nous plaçant dans le cadre de l'analyse, nous utilisons l'outil « calcul formel » qui effectue les manipulations algébriques (expression de la dérivée et calcul de ses zéros) en quelques clics. (Figure 7)

1	V(x)=x(a-2x)(b-2x) $\rightarrow \mathbf{V(x) = x\ (a-2\ x)\ (b-2\ x)}$
2	Développer[V(x) = x (a - 2x) (b - 2x)] $\rightarrow \mathbf{V(x) = a\ b\ x - 2\ a\ x^2 - 2\ b\ x^2 + 4\ x^3}$
3	Dérivée[V(x) = a b x - 2a x² - 2b x² + 4x³,x] $\rightarrow \mathbf{V'(x) = 12\ x^2 + a\ b - 4\ a\ x - 4\ b\ x}$
4	Résoudre[12x² + a b - 4a x - 4b x=0, x] $\rightarrow \left\{x = \frac{a+b-\sqrt{a^2-a\,b+b^2}}{6}, x = \frac{a+b+\sqrt{a^2-a\,b+b^2}}{6}\right\}$

Figure 7

Afin de fournir une justification acceptable pour la conjecture précédente, il faut changer de stratégie et considérer $\mathbf{x}_{max}$ comme fonction **M(b)** de la longueur **b** du carton, avec la largeur **a** comme paramètre. On a deux fonctions $\mathbf{M}_1$ et $\mathbf{M}_2$ qui sont les deux zéros de la dérivée.

$$M_1(b) = \frac{a+b-\sqrt{a^2-ab+b^2}}{6}$$

$$M_2(b) = \frac{a+b+\sqrt{a^2-ab+b^2}}{6}$$

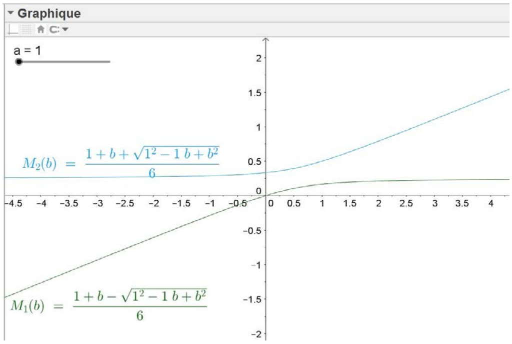

Figure 8

Grâce aux représentations graphiques de $\mathbf{M}_1$ et $\mathbf{M}_2$ (Figure 8) nous pouvons éliminer la fonction $\mathbf{M}_2$ car $M_2(\mathbf{b}) \geq 0{,}5\mathbf{a}$ quand $\mathbf{b} \geq$ a (or $\mathbf{x}_{max}$ ne peut pas être supérieur à la moitié de la largeur du carton) et observer le comportement asymptotique de la fonction $\mathbf{M}_1$.

Avec l'aide du curseur **a**, nous pouvons générer la famille des fonctions $\mathbf{M}_1$, et explorer leurs représentations graphiques (Figure 9).

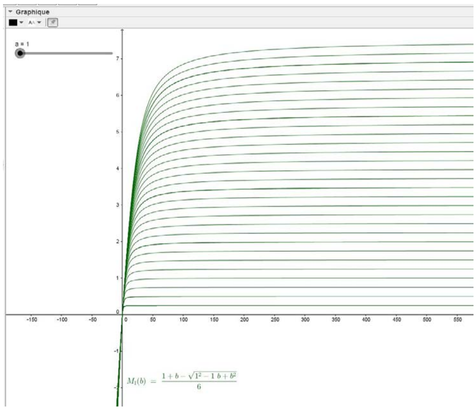

Figure 9

Cela confirme l'idée d'un comportement asymptotique et on peut s'atteler à formuler une preuve plus formelle, ce qui revient à calculer la limite de $\mathbf{M}_1$ lorsque **b** approche l'infini, c'est-à-dire :

$$\lim_{b\to\infty} \frac{a+b-\sqrt{a^2-ab+b^2}}{6}$$

Le calcul de cette limite peut à nouveau être effectué par l'outil « calcul formel » (Figure 10).

8	Limite[(a + b - sqrt(a² - a b + b²)) / 6, b,∞] → $\frac{1}{4}$ a

Figure 10

La fonction $\mathbf{M_1}$ étant croissante et continue, on peut conclure que $\mathbf{x}_{max}$ sera toujours compris entre ces deux valeurs :

$$\frac{1}{6}a \leq x < \frac{1}{4}a$$

Une extension du problème

Cette découverte permet de se pencher sur l'extension de ce problème proposée par Dodge et Viktora (Dodge & Viktora, 2002) :

Pour tout carton de dimensions a et b, où a ≤ b et en prenant la valeur du côté de carré à découper , quel sera le volume de la boîte par rapport au volume maximal ?

D'un point de vue pratique, pour fabriquer des boîtes typiques, nous nous demandons si nous pourrions dire au personnel de production de découper toujours les carrés de la longueur x=a/5 sans être trop loin de la boîte au volume maximal[5].

Nous pouvons commencer par comparer les deux volumes en saisissant les fonctions $\mathbf{V_1}$ (volume de la boite industrialisée pour **x=a/5**) et $\mathbf{V_2}$ (volume maximal) dans GeoGebra.

Pour tout *a* ≤ *b*

$$V_1(b) = \frac{1}{5}a(a-\frac{2}{5}a)(b-\frac{2}{5}a)$$

$$V_2(b) = \left(\frac{a+b-\sqrt{a^2-ab+b^2}}{6}\right) \times \left(a-\frac{a+b-\sqrt{a^2-ab+b^2}}{3}\right) \times \left(b-\frac{a+b-\sqrt{a^2-ab+b^2}}{3}\right)$$

5 *Traduit de l'anglais par nos soins.*

La fonction $\mathbf{V_2}$ étant difficile à étudier algébriquement, nous privilégions le registre graphique (figure 11). Nous observons alors que lorsque x = (1/5)**a**, $\mathbf{V_1}$ est assez proche de $\mathbf{V_2}$, mais que l'écart grandit en même temps que **b**. Nous pouvons nous demander si cet écart grandit proportionnellement à **b**.

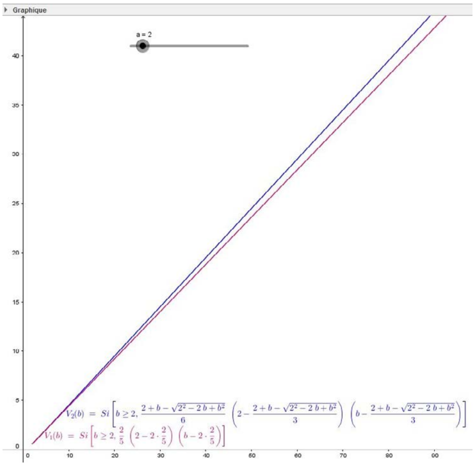

Figure 11

Nous nous intéressons pour cela à l'erreur relative exprimée en pourcentage :

$$E(b) = \frac{V_2(b)-V_1(b)}{V_2(b)} \times 100$$

Malgré la complexité de l'expression algébrique de E, sa représentation graphique nous permet de voir qu'elle a une asymptote d'équation y=4 (figure 12).

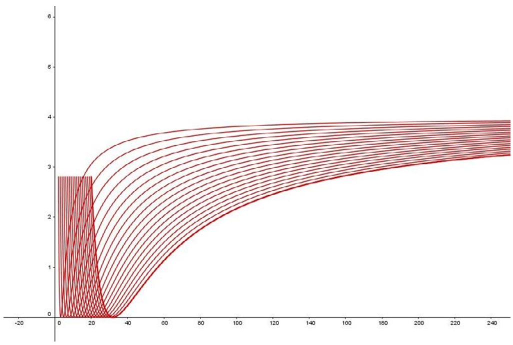

Figure 12

Le calcul complexe de la limite de la fonction E en +∞ est effectué par GeoGebra et nous montre qu'elle vaut 4.

D'après ces résultats, la différence entre les deux volumes pour toutes les boîtes ne dépassera jamais 4% du volume maximal.

Conclusion

Les deux approches (classique et avec la technologie) que nous venons de présenter abordent le même problème et révèlent les avantages et les inconvénients des deux méthodes proposées.

La résolution classique nécessite des manipulations algébriques techniquement complexes qui peuvent facilement décourager les élèves et sont susceptibles d'erreurs. Elle requiert que les élèves effectuent les changements de cadres dans un contexte de travail « mono-registre », majoritairement algébrique. Cependant, elle permet de travailler la modélisation et d'appliquer des outils d'analyse dans un contexte plus riche.

De l'autre côté, dans une résolution à l'aide de GeoGebra, les calculs numériques et la résolution algébrique sont pris en charge, ce qui facilite la gestion de la tâche dans le temps. Bien que cela soit pratique, ce n'est pas le principal atout d'une résolution à l'aide du logiciel. En effet, dans GeoGebra, les objets mathématiques sont représentés dans plusieurs registres simultanément ce qui favorise leur articulation qui comme le préconise Duval (1993) est fondamentale pour la compréhension d'un contenu conceptuel.

Dans tous les cas, la technologie n'est pas là pour remplacer l'enseignement des compétences algébriques, mais pour permettre une autre approche dans l'enseignement des mathématiques. L'élève peut alors se rendre compte que souvent la réponse à une question l'amène à s'en poser une autre, et voir que les mathématiques ne se limitent pas aux seules manipulations algébriques. Dans l'ensemble nous pouvons constater que GeoGebra mobilise l'utilisation de plusieurs registres de représentation sémiotique, favorise les changements de cadres et permet d'aborder des problèmes autrement inaccessibles aux élèves du secondaire en raison de la complexité du calcul. « *L'élève peut alors entrer dans une démarche d'investigation et expérimenter ainsi la manière dont les mathématiciens et les chercheurs travaillent*» (Dorier & García, 2013).

Références

Dodge, W. & Viktora, S. (2002). Thinking out of the Box … Problem: It's a richer problem than we ever imagined. *The Mathematics Teacher, 95*(8), 568-574.

Dorier, J.-L. & Burgermeister, P.-F. (2013). La modélisation dans l'enseignement des mathématiques en Suisse romande. *Petit x, 91,* 5-24.

Dorier, J.-L. & García, F. J. (2013). Challenges and opportunities for the implementation of inquiry-based learning in day-to-day teaching. *ZDM, 45*(6), 837-849. Repéré à https://doi.org/10.1007/s11858-013-0512-8.

Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 7*(2), 5-31.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Science Cognitives, 5,* 37-65.