Résolution des inéquations : une situation-problème étonante pour remédier aux erreurs

Salek Ouailal, Naceur Achtaich

Centre régional des métiers de l'éducation et de la formation. Agadir

Membre associé à l'Observatoire de Recherche en didactique et Pédagogie Universitaire (ORDIPU), Faculté des Sciences Ben M'sik, Casablanca (Maroc)

Introduction

Voilà un constat partagé par la majorité des professeurs de mathématiques qui est devenu une habitude scolaire : c'est lors de la correction en classe des copies du devoir surveillé que l'on peut avoir des idées supplémentaires sur les erreurs des apprenants. Cependant, ces séances n'ont parfois pas les effets escomptés sur les élèves : peu de remédiation des erreurs, non remise en cause des conceptions erronées, et ce, en dépit des efforts fournis par les professeurs et notamment des différentes méthodes de correction employées. Souvent, les élèves sont peu impliqués dans la correction. En effet, une grande partie d'entre eux sont dans une situation de stress du fait qu'ils attendent leurs notes, et une autre se contente de recopier ce qu'il y a au tableau de manière passive. Dans ces conditions, nombre de professeurs n'arrivent pas à se satisfaire du déroulement de telles séances.

À la marge des discussions autour des questions d'enseignement et d'apprentissage menées avec des élèves à ce propos, on signale souvent la phrase suivante « Ce n'est pas surprenant, je m'attendais à ceci ...». Une telle phrase est déclamée à la fois par le groupe des "bons" élèves dans le sens qu'il n'y a pas de surprise dans les étapes de résolution des exercices proposés puisqu'ils les ont tous réussis ; et aussi par les élèves dits "en difficulté" d'apprentissage, confirmant qu'ils ont commis des erreurs, mais sans qu'ils fassent un effort pour comprendre au moins la différence avec leurs propres réponses. L'erreur pour ce dernier groupe est loin d'être une surprise !

À l'exception des erreurs scolaires, du type étourderie ou distraction dues à l'ennui, qui dépendent des particularités de l'élève, les deux types d'erreurs qui nous intéressent sont les erreurs collectives écrites, produites par les élèves, dues à des habitudes scolaires ou témoignant chez eux de fausses représentations (Astolfi, 1991). Ces deux dernières sont souvent liées à la façon naïve de penser les objets mathématiques.

Dans le but de différencier notre choix didactique des problèmes qui jouent, sans doute, un rôle spécifique sur l'apprentissage, nous allons nous référer à ce que la littérature didactique appelle la « pédagogie de l'étonnement » (Mathieu, 2010) ou encore « s'étonner pour apprendre » (Meirieu, 2014) pour faire face à l'erreur scolaire. Notre visée majeure est de permettre à l'élève adolescent de développer une pensée formelle réflexive qui puisse l'engager à exercer un deuxième regard constructif et critique sur ses démarches habituelles de travail dans l'activité mathématique.

Dans le contexte d'une "pédagogie de l'étonnement", nous allons discuter une combinaison possible de paradoxes en mathématiques et de situations d'apprentissages pour définir une nouvelle situation, que nous pensons pertinente afin de remédier à quelques erreurs fréquentes en Algèbre : nous allons la nommer situation-problème étonnante.

La situation-problème étonnante (SPE)

Description du dispositif

Afin d'aborder l'erreur scolaire par l'étonnement, nous souhaitons mettre en place un dispositif particulier d'apprentissage qui pousse l'élève adolescent à s'engager volontairement à changer ses représentations mentales et qui permette traiter des erreurs persistantes. Ceci, bien entendu, après un conflit cognitif voulu, inévitable. On appellera l'ensemble de ces tâches, situation-problème étonnante (SPE). Une SPE est composée de deux parties :

- Une première partie sous forme d'un paradoxe en mathématiques, qui peut être un raisonnement d'apparence logique, donnant lieu à une conclusion étonnante, avec comme but l'émergence d'une erreur spécifique.
- La deuxième partie est une situation qui exige l'utilisation de plusieurs types de connaissances et dont l'erreur (ou les erreurs) discutée(s) dans la première partie est masquée et a priori inévitable.

Nous tenons à préciser qu'une SPE doit être proposée en fin d'apprentissage à la différence de la situation-problème au sens de Brousseau (1998) qui s'utilise au début de l'apprentissage. L'enjeu didactique porte sur l'apport de l'étonnement vu comme élément essentiel illustrant le conflit cognitif qui s'opère chez l'apprenant, motivant la recherche d'explication et donc le dépassement d'une connaissance ancienne vers une connaissance nouvelle.

Les caractéristiques de la SPE

Une situation-problème étonnante devrait :

- être liée à une erreur persistante issue d'une représentation mentale inadéquate ;
- faire naître un étonnement chez les élèves ;
- créer une rupture amenant à déconstruire le modèle explicatif habituel et erroné ;
- correspondre à deux situations : une première faisant apparaitre des démarches ordinaires non complexes, pouvant s'ouvrir sur une conclusion d'apparence logique acceptable mais non correcte à cause d'une erreur. Une deuxième qui amène l'apprenant à procéder prudemment par une recherche cognitive permettant de réorganiser ses connaissances antérieures pour ne pas reproduire l'erreur ;
- déboucher sur une remédiation durable de l'erreur.

Expérimentation didactique de la SPE

Contexte de l'expérimentation

Dans l'enseignement secondaire au Maroc, les équations et inéquations algébriques du second degré sont enseignées au niveau de la première année du lycée. Ce chapitre d'Algèbre est d'une importance capitale pour l'élève au lycée, vu ses applications en tant qu'outil dans le champ de l'Analyse en particulier pour l'étude et la représentation des fonctions numériques. Il s'applique aussi aux questions de détermination du signe d'une fonction numérique ou du signe de sa dérivée ...

Les erreurs qui nous paraissent plus intéressantes sont celles issues des habitudes scolaires ou des pratiques langagières des mathématiques. Ainsi on entend souvent dire dans les classes la phrase : « Après simplification, on trouve … » au lieu de dire par exemple : « On multiplie les deux membres par … ». Nous nous intéressons aussi aux erreurs dues à des représentations mentales chez les élèves : « une variable est positive... »

Les deux erreurs ciblées par notre SPE sont :

« Si $mx = my$ alors $x = y$ »

et « Si $mx \leq my$ alors $x \leq y$ »

Ces deux erreurs méritent bien un traitement didactique particulier, ce qui est confirmé aussi par la littérature (voir par exemple Sackur & Maurel, 2000).

Énoncé de la situation-rpoblème étonnante

Notre situation-problème étonnante est composée de trois parties : les deux premières sont sous forme de paradoxes mathématiques, et la troisième est une situation abordant la résolution d'une équation/inéquation. Cette partie C présente une question non ordinaire, pour laquelle on n'impose pas de suivre une méthode algébrique ou bien géométrique, le changement de cadre de résolution est laissé au choix de l'élève.

Voici son énoncé :

Partie A :

Lisez bien la démonstration suivante :

Soit x un réel tel que $x = y$

Alors $xy = y^2$

et par suite $xy - y^2 = x^2 - y^2$

En utilisant l'identité remarquable :

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

on trouve : $y(x-y) = (x-y)(x+y)$

Après simplification on aura : $y = x + y$

Or, $y = x$ donc $y = 2y$.

On simplifie par y et on déduit que $1 = 2$.

Qu'est-ce que vous pensez du résultat obtenu ? Comment expliquez-vous ceci ?

Partie B :

Lisez bien la démonstration suivante :

Soient a et b deux réels tels que $a < b$.

Alors $a(a-b) < b(a-b)$.

D'après la loi de distributivité, on obtient :

$a^2 - ab < ba - b^2$.

d'où : $a^2 - 2ab + b^2 < 0$

En utilisant l'identité remarquable :

$(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$

on déduit que : $(a-b)^2 < 0$.

Qu'est ce que vous pensez du résultat obtenu ? Comment expliquez-vous ceci ?

Partie C :

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$x^3 - 4x^2 = 5x$$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation :

$$x^2 - 4x + 3 \geq \frac{-2}{x}.$$

Analyse a priori de la SPE, première prise en compte de quelques paramètres

À la 15ème semaine de l'année scolaire, après une séquence d'enseignement sur les équations/inéquations, nous avons distribué la partie C (seulement) de la situation à deux classes (59 élèves) d'un « bon » niveau. Chacune des classes est sous la responsabilité de trois étudiants professeurs de notre CRMEF[1]. Notre but était d'avoir une idée préalable sur toute erreur possible sur le sujet proposé. On a imposé que la tâche se fasse individuellement par chaque élève durant une heure. On a ainsi noté qu'il y a effectivement deux erreurs fréquentes qui constituent des obstacles d'ordre épistémologique, à savoir, la simplification ou la multiplication par une inconnue x dans les deux membres d'une équation (ou d'une inéquation).

Lecture didactique de la situation-problème étonnante proposée

Les erreurs à travailler sont maintenant précisées, il s'agit bien de l'opération de la « simplification par la variable » (qui peut être nulle!) ou bien « la multiplication par la variable des deux membres d'une inéquation » (qui peut être négative!). Pour changer de telles démarches de résolution, nous avons proposé dans les parties A et B deux paradoxes mathématiques, présentant des raisonnements utilisant des techniques habituelles. Mais qui conduisent aux deux conclusions impossibles suivantes : 1=2 et $x^2 \leq 0$.

Nous souhaitons ainsi voir la réaction des élèves, leur étonnement et l'exploiter pour son intérêt pédagogique. Cette étape de notre travail a nécessité une réunion avec notre groupe d'étudiants professeurs afin de souligner la nécessité du travail individuel pour cette tâche. Ces derniers ont recommandé de distribuer des polycopiés pour que les élèves travaillent individuellement sans donner des indications aux autres sur le passage erroné dans les démonstrations. Ils ont aussi suggéré de laisser un temps suffisant pour la recherche pour donner à l'apprenant le temps de « se parler à soi-même » dans le but de créer chez lui des conflits mentaux : investigation, étonnement, questionnement, doute, relecture, remise en question...

Pour la partie C, on suggère le travail en petits groupes pour profiter des interactions pédagogiques résultant de la dynamique des groupes. Comme dit précédemment le changement de cadre de résolution est laissé au choix de l'élève et l'usage d'une calculatrice scientifique est autorisé.

---

1 Centre Régional des Métiers de l'Education et de la Formation où les étudiants professeurs suivent une année de qualification qui se décompose en deux semestres. Chacun est composé de 13 semaines. Au cours de l'année ils bénéficient de 12 semaines d'étude théorique et 14 semaines de pratique.

Déroulement de l'expérmentation

L'expérience s'est déroulée, dans six classes (première année du lycée, série scientifique) sur un échantillon de 206 élèves d'un niveau hétérogène. La période de l'expérimentation a été celle où les élèves étudiaient le chapitre d'analyse « Paraboles et hyperboles ». L'horaire de la programmation a été laissé adaptable aux contraintes de chacun des six professeurs dans les établissements. Le tableau ci-dessous présente le scénario de déroulement de la séance estimée à deux heures trente minutes environ :

Durée estimée	Consignes
15 min	Explication de la démarche de travail ; Répartition (aléatoire) des élèves en petits groupes de cinq élèves.
25 min	Distribution de la partie A (premier paradoxe) ; Travail individuel de 15 min ; Discussion des productions des élèves.
25 min	Distribution de la partie B (deuxième paradoxe) ; Travail individuel de 15 min ; Discussion.
1h 25 min	Distribution de la partie C ; Travail collectif ; Discussion.

Tableau 1 : Scénario de l'expérimentation.

Travail des élèves et analyse de l'expérimentation

Autour de la partie A : premier paradoxe

La discussion des résultats des élèves a pris plus que le temps estimé. Il s'agit dans cette partie, d'une situation qui nécessite des outils élémentaires d'Algèbre. Cependant plus de 87 % n'ont pas pu déceler l'erreur. A la première lecture la certitude que la conclusion 1=2 est fausse pousse la majorité des élèves à croire que la faille existe et est facile à trouver. Lors de la deuxième lecture, les choses commencent à changer, un défi naturel s'enclenche pour essayer de trouver l'erreur et être le premier à la trouver. Les relectures se poursuivent parfois rapidement et parfois très lentement. Une partie des élèves pose les stylos avec des signes de fatigue, ils attendent la correction !

Certainement, il y a un vertige mental pour les apprenants, le temps est presque écoulé et la pression augmente, c'est la même atmosphère de classe que lors des devoirs surveillés, certains élèves demandent plus de temps de recherche et d'autres, à force d'entendre qu'il faut apprendre les identités remarquables par cœur, oublient qu'il s'agit juste d'un outil de calcul auxiliaire. Un des effets de l'étonnement dans ce cas est que l'élève commence à douter des formules classiques habituelles.

Un moment fort d'apprentissage : développement d'une pensée algébrique

Après ces discussions, les apprenants attendent la correction de la part du professeur. Ce moment de silence causé par l'étonnement, qui place tout le groupe dans un projet d'attention volontaire, est – nous pensons – l'une des clés pédagogiques. Le professeur a écrit au tableau en majuscules le mot « SIMPLIFIER », comme une étincelle pour lancer une deuxième recherche collective de l'erreur. Quelques instants après, une phrase est prononcée par un élève : « on a simplifié par zéro » … « Oui » dit le professeur. Puis il écrit au tableau : « 0x2017 = 0x1 implique 2017 = 1...! », ce qui illustre l'erreur.

En conclusion, les apprenants ont mieux compris le sens du mot « simplifier » et ses limites, ils ont été convaincus d'employer l'expression « multiplication par un nombre non nul ». On peut espérer que ce soit un premier pas pour remplacer la pensée arithmétique par une pensée plus algébrique.

Autour de la partie B : deuxième paradoxe

Le travail sur le deuxième paradoxe, se fait de la part des élèves avec autant de sérieux et de défi. Néanmoins, cette fois plus de 92% n'ont pas trouvé l'explication. Le scénario est semblable à celui du premier paradoxe, sauf que cette fois les apprenants sont très pressés de voir la correction.

Le thème de la discussion tourne autour du signe de a et du signe de b. Une étude de cas est faite au tableau. Le professeur dévoile l'erreur explicitement en donnant l'exemple suivant : multiplions l'inégalité -10 ≤ 5 par -10 on trouve …100 ≤ -50 ...!

Le temps a été suffisant pour que le groupe retienne la phrase formulée par un élève : « il faut faire attention au sens d'une inéquation lors de la multiplication par un scalaire ».

En conclusion, les élèves ont pu porter un deuxième regard conscient sur leurs habitudes scolaires d'aborder les mathématiques. Nous pensons que cette conscientisation aidera fortement à remédier aux deux erreurs evoquées.

Autour de la partie C

Les élèves, à ce moment de la séance, sont satisfaits et convaincus par les deux « conclusions » déduites des deux parties précédentes. Le travail est maintenant par groupes de cinq élèves. Nous présentons les productions des élèves accompagnées de quelques commentaires.

Rédaction du groupe 3 :

$$x^2 - 4x + 3 \geq \frac{-2}{x};$$

$$x^2 - 4x + 3 + \frac{2}{x} \geq 0;$$

$$\frac{x^3 - 4x^2 + 3x + 2}{x} \geq 0$$

Premier cas : $x > 0$; $x^3 - 4x^2 + 3x + 2 \geq 0.$

Deuxième cas : $x < 0$.

On pose $x = -|x|$;

$$\frac{x^3 - 4x^2 + 3x + 2}{-|x|} \geq 0$$

On multiplie par le nombre négatif « moins un ». On aura :

$$(x-2)(x^2-2x-1) \leq 0$$

Commentaires :

Les élèves dans cette rédaction ont voulu « échapper » à la multiplication des deux membres de l'inéquation, ils essayent donc de ne pas commettre l'erreur discutée dans la partie B. Ils ont donc « amené » la quantité figurant dans le deuxième membre de l'inégalité dans le premier membre. Cependant, après addition de la fraction rationnelle et du polynôme, le problème persiste. Ils se trouvent cette fois face à la multiplication par la variable x. Prudemment, ils ont distingué le cas correspondant à x strictement positif (ils évitent de multiplier par x nul, erreur discutée dans la partie A).

Une nouvelle représentation mentale s'est dégagée dans ce groupe. C'est à force de chercher à multiplier par des quantités positives, qu'ils ont utilisé la valeur absolue dans le cas où x est négatif. Voilà un effet positif de l'étonnement !

Rédaction du groupe 5 :

$$x^2 - 4x + 3 \geq \frac{-2}{x}.$$

Premier cas : $x = 0$.

L'inégalité est impossible !

Deuxième cas : $x > 0$

$$x\left(x^2 - 4x + 3\right) \geq -2 \quad ;$$
$$x^3 - 4x^2 + 3x + 2 \geq 0;$$

Troisième cas : $x < 0$

$$x\left(x^2 - 4x + 3\right) \leq -2;$$
$$\left(x - 2\right)\left(x^2 - 2x - 1\right) \leq 0.$$

Commentaires :

Ce groupe a choisi de multiplier dès la première ligne par la variable x. Sauf qu'ils sont conscients du fait que x ne doit pas être nul, c'est pourquoi ils l'ont pris comme cas particulier d'étude. Ceci a permis à ce groupe d'éviter une autre erreur fréquente, celle de chercher l'ensemble de définition d'une inéquation, que la majorité des élèves ne précise pas au début de la résolution des inéquations. Cette rédaction, est un modèle typique du raisonnement par étude de cas. Un autre effet positif de l'étonnement est l'amélioration de la rédaction mathématique. En effet, les élèves ont analysé l'inégalité $\left(x - 2\right)\left(x^2 - 2x - 1\right) \geq 0$ en traitant séparément le signe de chacun des facteurs formant le produit.

Rédaction du groupe 2 :

Premier cas : $x \geq 0$

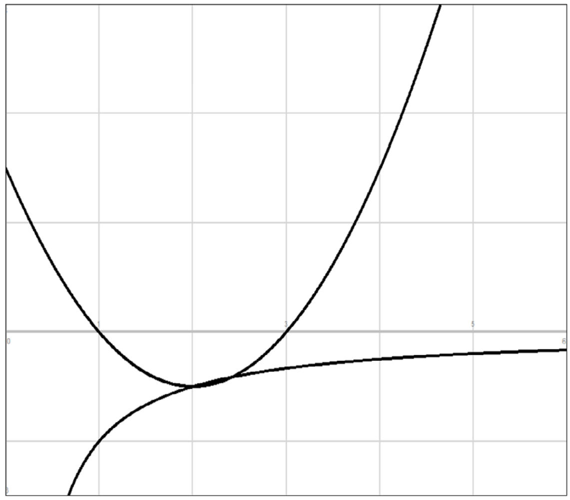

Figure 1.

<u>Deuxième cas :</u> $x \leq 0$

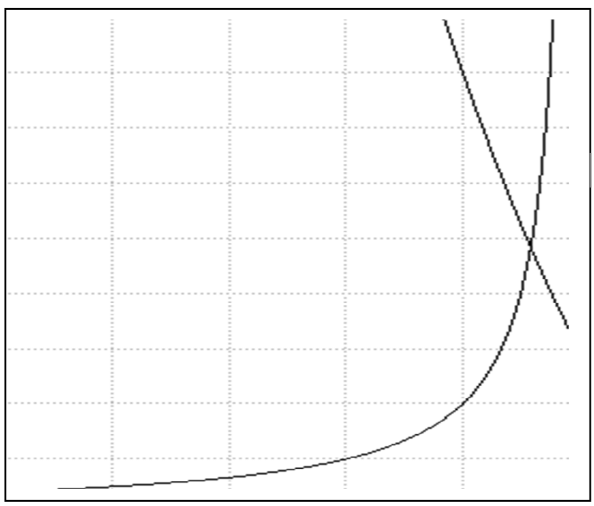

Figure 2.

Commentaires :

Ce groupe « prudent » a choisi de s'éloigner de l'approche algébrique de résolution, en traçant dans un même repère les graphiques qu'ils ont l'habitude de représenter couramment dans le chapitre « Paraboles et hyperboles ». Ils ont pris leur temps pour tracer séparément les deux graphiques sur chaque demi-plan (voir Figure 1 et Figure 2).

Dans une deuxième étape, ils ont résolu des équations algébriques, pour déterminer les points d'intersection des deux courbes. Ils justifient ceci en disant qu'il y a moins de « risque » de travailler avec des équations que des inégalités.

Les groupes ayant choisi de procéder dans le cadre graphique sont ceux qui ont souvent réussi la résolution du problème. Certains groupes ont fait une résolution algébrique erronée, mais ils ont pu, grâce à la représentation graphique, refaire le travail tout en cherchant leurs erreurs.

Conclusion

Dans la perspective de modifier les modèles habituels de pensée chez les apprenants adolescents, souvent source d'erreurs mathématiques scolaires, nous avons présenté dans ce travail un outil didactique sous le nom de situation-problème étonnante pour faire réfléchir les professeurs sur la nécessité de différencier leurs approches d'enseignement en passant par l'étonnement chez l'apprenant. Comme on a pu le voir dans l'expérimentation, l'étonnement issu de notre situation a engagé l'élève à réfléchir plus profondément sur ses processus intellectuels, et ainsi modifier d'une manière qu'on espère durable certaines de ses conceptions erronées sur des objets mathématiques.

Peut-on parler même d'un étonnement scolaire ? D'une pédagogie de l'étonnement ? N'est-t-il pas temps de changer quelques situations d'apprentissage de « routine » dans les programmes scolaires ? Passer du type de situations soigneusement élaborées ou des situations d'ostension des objets mathématiques à des situations étonnantes ouvrant sur l'exploration et la pensée mathématique face à quelques erreurs en mathématique ?

Références

Astolfi, J.-P. (1991). *L'erreur, un outil pour enseigner. Paris :* Collection ESF.

Brousseau, G. (1998). *La Théorie des situations didactiques.* Grenoble : La pensée sauvage.

Mathieu, A. (2010). Pratique d'une pédagogie de l'étonnement en mathématiques en classe de seconde. *Expressions, 35*, 93-117.

Meirieu, Ph. (2014). Mais où est donc passé l'étonnement ? *Éducation permanente, 200*.

Sackur, C. & Maurel, M. (2000). Les inéquations en classe de la seconde une tentative pour enseigner la nécessité des énoncés mathématiques. *Petit x, 53*, 5-26.