Calculatrice et Plan d'Etudes Romand (PER[1]) De la décomposition des nombres à la simplification des fractions

Ruhal Floris[2]

Institut Universitaire de Formation des Enseignants de Genève

Ce texte inaugure une série d'articles ayant pour but de faire des propositions d'intégration de la calculatrice dans l'enseignement secondaire inférieur, en tenant compte du PER et des nouveaux moyens d'enseignement. Les sujets choisis ici concernent la 9ème et la 10ème année et font partie du thème NO, Nombres et Opérations. Dans un premier temps nous rappelons le contenu du PER et le mettons en lien avec une catégorisation des utilisations de la calculatrice proposées dans le curriculum genevois en vigueur avant le PER.

Nous présentons ensuite une analyse didactique de deux thèmes, décomposition des nombres et simplifications des fractions - fortement en lien l'un avec l'autre - et nous montrerons comment ils peuvent être l'occasion d'utiliser la calculatrice de façon intéressante.

Calculatrice et plan d'études

Notons tout d'abord que le PER prévoit dans les commentaires généraux la mise à disposition d'une calculatrice, sans préciser à quel moment, ni quel type de calculatrice[3]. Plus précisément, cette dernière est mentionnée dans le thème « Nombres » (MSN 32) où parmi les attentes fondamentales on lit :

Utilise les fonctions de base de la calculatrice (+;–; x ; ÷ ; racine ; puissance ; mémorisation ;…) et met en lien le résultat obtenu avec le résultat attendu.

Quant aux apprentissages mentionnés (pour les degrés 9 à 11, sans précision supplémentaire) ce sont :

- utilisation de la calculatrice dans des situations où l'aspect calculatoire est secondaire, pour vérifier le résultat d'un calcul ou pour effectuer des calculs complexes.
- acceptation ou refus d'un résultat par l'estimation de l'ordre de grandeur, la connaissance des opérations ou la confrontation au réel.
- connaissance et utilisation de diverses fonctions de la calculatrice : quatre opérations de base, parenthèses, mise en mémoire et récupération de valeurs, puissance, racine,…
- prise en compte de l'ordre dans lequel la calculatrice effectue les opérations.

Dans MSN 33 « Opérations », mention est faite parmi les objectifs du thème :

Résoudre des problèmes numériques et algébriques (…) en construisant, en exerçant et en utilisant des procédures de calcul (calcul réfléchi, algorithmes, calculatrice, répertoire mémorisé) avec des nombres réels.

Et les attentes fondamentales sont :

- utilisation de représentations et d'outils de calculs appropriés
- estimation et vérification de la pertinence du résultat

Il est intéressant d'effectuer une comparaison avec le Curriculum genevois 2003-2004 (DIP-Genève, 2003)[4], dans lequel figurait une partie explicite de trois pages concernant la calculatrice dans laquelle quatre types d'utilisation avaient été identifiés :

1) Permettre aux élèves de manipuler correctement une calculatrice.

2) Permettre aux élèves d'avoir un regard critique sur les résultats affichés par la calculatrice.

3) Décharger partiellement les élèves des

1 www.plandetudes.ch/web/guest/mathematiques

2 Ruhal.Floris@unige.ch

3 A Genève, la CEM (commission pour l'enseignement des mathématiques) fait une proposition de modèle sur la base d'un cahier des charges précis : le modèle actuel est la TI-30XS Multiview.

4 www.ssrdm.ch/ressources/doc_admin_utiles/PE_Math_CO_2003.pdf

calculs pour leur permettre de se consacrer plus à la réflexion et à la démarche mathématique.

4) Utiliser la calculatrice comme moyen participant à l'apprentissage de notions mathématiques.

Les trois premiers sont reformulés et repris dans le PER. Le quatrième ne l'est pas, il est inclus implicitement dans l'objectif de résolution de problèmes par différents outils. Nous donnerons quelques exemples dans cet article et les suivants.

La décomposition d'un nombre entier. Eléments mathématiques et didactiques.

L'écriture d'un nombre entier sous forme d'un produit de facteurs premiers permet de simplifier le travail sur les produits, les multiples et les diviseurs. Elle permet aussi de trouver des formes réduites pour des quotients ou des racines. Il s'agit d'initier l'élève à ce qu'on peut appeler la « pensée » algébrique, avec l'idée d'écrire différemment les nombres selon les propriétés que l'on veut mettre en évidence[5]. Cela permet de donner au signe d'égalité une nouvelle signification : ce n'est plus simplement le résultat d'un calcul. Nous retrouvons cette intention dans le PER (MSN 32) sous la forme suivante :

> *Connaissance et utilisation de différentes écritures d'un même nombre.*

D'un point de vue socio-culturel, la décomposition est à la base des modalités permettant l'identification de l'utilisation d'une carte bancaire. Certes, une connaissance détaillée du fonctionnement des systèmes que l'on utilise n'est pas indispensable, mais ce que l'on vise ici, c'est plutôt celle de leurs principes, de sorte qu'on comprenne pourquoi on peut leur faire confiance. Dans ce cas, c'est la difficulté de factoriser des grands nombres qu'il est judicieux de faire connaître. Bien entendu, la décomposition a également un intérêt pour la théorie des nombres, mais nous ne développons pas cet aspect ici.

Rappelons qu'il existe une technique de base « naïve » permettant d'obtenir la décomposition d'un nombre, consistant à le diviser par tous les nombres entiers successifs supérieurs à 1, dans l'ordre. Lorsque le quotient obtenu est entier, on recommence l'opération avec ce quotient, en repartant avec le diviseur trouvé. On s'arrête lorsque le quotient est égal à 1 (le diviseur est égal au nombre donné). Le produit des diviseurs ainsi déterminés est égal au nombre de départ et la décomposition est unique :

Nous désirons factoriser 9438.
9438/2 = 4719 sans reste donc 2 est un facteur.
Nous répétons l'algorithme avec 4719.
4719/2 = 2359,5 donc 2 n'est plus un facteur.
4719/3 = 1573 donc 3 est un facteur.
1573/3 = $524,\overline{3}$ donc 3 n'est plus un facteur.
1573/4 = 393,25 donc 4 n'est pas un facteur.
1573/5 = 314,6 donc 5 n'est pas un facteur.
De manière similaire jusqu'à
1573/11 = 143
Le nombre suivant qui divise 143 est à nouveau 11 :
143/11 = 13
13/11 = $1,\overline{18}$ donc 11 n'est plus un facteur
13/12 =$1,08\overline{3}$ donc 12 n'est pas un facteur et 13/13 = 1. Stop !
En récapitulant, nous avons 9438 = $2\times3\times11\times11\times13 = 2\times3\times11^2\times13$

Figure 1 Décomposition de 9438 par la technique de base « naïve »

Les nombres obtenus sont tous premiers, par définition. En effet si on obtenait un nombre non premier, il serait produit d'au moins deux nombres entiers que l'on aurait obtenus précédemment puisqu'ils sont plus petits et que l'on procède dans l'ordre. Si on ne trouve aucun diviseur, on sait que le nombre de départ est premier.

Certes, ces considérations ne suffisent pas à prouver rigoureusement l'existence et l'unicité de la décomposition, mais elles permettent de s'en convaincre.

L'utilisation de propriétés arithmétiques

5 *Par exemple 42=2x21 met en évidence que 42 est pair.*

permet d'améliorer l'efficacité de la technique. Par exemple, si un nombre n est divisible par 9, il est divisible deux fois par 3. On aura donc déjà obtenu le facteur 3. Il n'est ainsi pas nécessaire de diviser par des nombres non premiers (cf. crible d'Eratosthène). De plus, puisqu'à chaque diviseur d obtenu correspond un autre diviseur tel que leur produit soit égal à n, lorsque cet autre diviseur est plus petit que d, on peut s'arrêter.

Cette technique peut être améliorée en utilisant certains critères de divisibilité, en particulier pour 2, 3 et 5. Sachant que pour n aléatoire il existe 50 % de chances que 2 soit un facteur de n, et 33 % de chances que 3 soit un facteur, et 20% de chances que 5 soit un facteur, cette amélioration sera en général importante. Il est également intéressant de savoir que 88 % de tous les entiers positifs ont un facteur inférieur à 100, et que 91 % ont un facteur inférieur à 1 000 (« Divisions successives », Wikipedia).

Nous désirons factoriser 9438.

Le nombre est pair donc 2 est un facteur. 9438/2 = 4719

Le nombre 4719 est impair, on passe au diviseur 3. La somme des chiffres est divisible par 3, donc 3 est un facteur. 4719/3 = 1573. La somme des chiffres n'est pas divisible par 3, donc 3 n'est plus un facteur.

1573 n'est pas pair donc 4 et tous les nombres pairs ne sont plus des facteurs.

1573 ne se termine ni par 0 ni par 5 donc 5 n'est pas un facteur.

On saute 6 car il est pair. 1573/7 = 224,71.. donc 7 n'est pas un facteur.

On saute 9 (=3x3), 8 et10, pairs, sont éliminés.

1573/11 = 143. Le nombre suivant qui divise 143 est à nouveau 11 :

143/11 = 13

13/11 = $1,\overline{18}$ donc 11 n'est plus un facteur et le quotient est inférieur au diviseur. Stop !

Figure 2 Décomposition de 9438 par une technique utilisant des propriétés numériques

L'utilisation du critère de divisibilité par 11 permet d'éviter le dernier calcul. Alors que la technique précédente demandait 16 divisions, 6 sont ici suffisantes. Nommons cette technique la technique standard. Cette technique est celle qui est présentée dans l'Aide-mémoire des moyens d'enseignement romands (CIIP, 2011) sous la forme bien connue d'un algorithme en deux colonnes ou, moins usitée, selon le développement d'un arbre.

Cependant, selon les nombres considérés, d'autres techniques sont plus efficaces. Pour les nombres en dessous de 90 ou pour certains carrés parfaits bien connus, on peut utiliser la table de multiplication :

49 = 7×7 ou encore 42 = 6×7 = 2×3×7

Lorsqu'un nombre proposé (impair) est absent de la table (au niveau des résultats) on peut conclure à sa primalité.

Pour des nombres plus grands multiples de 2, 3, 5, 10 on peut se ramener à effectuer la recherche pour un nombre plus petit. Par exemple, avec 84 une fois noté que 84=2×42 on peut ainsi se ramener à la technique précédente (de la table).

Idem pour 4200 = 42×100 = 6×7×10×10 = 2×3×7×2×5×2×5 = 2×2×2×3×5×5×7.

Ainsi, selon le type de nombre, certaines techniques seront plus efficaces que d'autres.

Quelles sont les techniques enseignées ?

Le PER indique, dans MSN32 (« Nombres »), les apprentissages suivants :

> *Critères de divisibilité, multiples et diviseurs communs (pour tous les niveaux); ppmc, pgdc, nombres premiers, produit de facteurs en 9ème pour les niveaux 2 et 3 et en 10ème pour le niveau 1.*

Et dans les attentes fondamentales, on trouve :

> *Décompose un nombre inférieur à 1000 en produit de facteurs premiers.*

Le plan d'études est cependant muet sur ce que serait une technique « officielle »[6]. La question est de savoir si l'on attend que l'élève sache décomposer n'importe

6 Dans le Curriculum genevois de 2003, page 14, on constate par contre que la décomposition fait explicitement partie des techniques à enseigner.

lequel de ces nombres, même 991 qui est premier et pour lequel au moins 10 divisions sont nécessaires ou encore 899 = 29×31. Un examen des moyens d'enseignement peut fournir des indices concernant le choix implicitement favorisé. A cet égard, l'exercice NO50 (9ème année) est intéressant :

Décompose les nombres suivants en un produit de facteurs premiers :

12; 49; 54; 84; 180; 525; 600; 4200; 4700; 150 000

On se rend rapidement compte que tous les items de cet exercice peuvent être traités par les techniques alternatives à la technique standard (présentée ci-dessus). Et en 10ème année, l'exercice NO15 propose :

Les nombres suivants sont-ils premiers ? Dans le cas contraire, donne leur plus petit diviseur différent de 1. 13 ; 18 ; 23 ; 27 ; 43 ; 81 ; 89 ; 101 ; 169 ; 319 ; 405

Il n'y a ici que deux nombres un peu « délicats » à traiter : 101, 319.

Ce qui précède nous permet de conclure que la technique standard n'est pas toujours enseignée, et que l'attente du PER concernant la décomposition de nombres au dessous de 1000 se limite à ceux qui n'ont pas plusieurs facteurs dépassant 10. Cette impression est renforcée par les valeurs proposées dans la fiche de fin de thème en 10ème « faire le point » : 36; 42; 180; 68 et par les commentaires pour le maître du livre de 10ème (Figure 3). Cependant, dans le PER il n'y a pas de restriction sur la valeur des nombres :

Identifier un nombre premier.

Décomposer un entier en produit de facteurs premiers.

En définitive, certains élèves pourraient retenir que le domaine des nombres que l'on peut décomposer et donc celui des nombres premiers que l'on peut déterminer est limité. Par la suite, le domaine des fractions simplifiables sera également limité et il ne sera pas évident pour l'élève que toute

NOMBRES DÉCIMAUX **COMMENTAIRES 10e**

Nombres premiers, ppmc et pgdc LEp14

Cette balise permet aux élèves de Niveau 1 de découvrir les notions de nombres premiers, pgdc et ppmc. Elle offre la possibilité de réactiver ces connaissances abordées en 9e pour les élèves des Niveaux 2 et 3. (cf. « Progression des apprentissages différenciés » dans les commentaires du chapitre).

Les nombres premiers sont sources d'innombrables travaux, tant leur répartition et leurs propriétés ont fasciné les mathématiciens. Pour les élèves, l'enjeu principal à la connaissance des nombres premiers réside surtout dans le fait de connaître les plus petits d'entre eux (**NO14** à **NO16**) en vue de faciliter la décomposition d'un nombre en produit de facteurs premiers (**NO20 Décompositions**) et éventuellement de calculer le ppmc et pgdc à l'aide de cette décomposition (**NO21** à **NO24**).

Les notions de ppmc et pgdc sont ensuite réinvesties dans des problèmes (**NO25** à **NO27**). Ces problèmes peuvent être proposés aussi bien aux élèves de Niveau 1 qu'à ceux des Niveaux 2 et 3.

Institutionnalisation

Au cours de cette balise il sera possible, pour les élèves de Niveau 1, d'institutionnaliser les notions de nombres premiers (*Aide-mémoire*, p. 16), ppmc (*Aide-mémoire*, p. 14) et pgdc (*Aide-mémoire*, p. 16). On peut aussi institutionnaliser une méthode de décomposition d'un nombre entier en un produit de facteurs premiers (*Aide-mémoire*, p. 17).

Figure 3 Commentaires pour le maître, 10ème fraction peut être rendue irréductible. C'est ce que nous montrons dans la suite de l'article.

Et la calculatrice dans tout cela ?

Elle n'est certes pas nécessaire pour effectuer les décompositions demandées dans ces exercices, mais peut être employée pour les vérifier. Elle pourrait être introduite si l'exercice NO50 était complété par des items plus compliqués tels que 93960 = 2^3 x 3^4 x 5 x 29, en restant dans le domaine des techniques alternatives. Nous suggérons son utilisation pour introduire et motiver la technique standard en proposant des nombres comportant plus de deux facteurs premiers différents de 2, 3 et 5, tels que 203 = 7 x 29, 221 = 13 x 17, 3654 = 2 x 32 x 7 x 29, etc. Dans ce cas, il s'agit bien d'une utilisation de la calculatrice participant à l'apprentissage des mathématiques (4ème type d'utilisation, voir au début de l'article). On utilise l'efficacité de la calculatrice pour apprendre une technique générale sans effectuer trop de calculs « à la main », pour se rendre compte que l'on peut déterminer la primalité de nombres aussi grands qu'on veut, si on a le temps pour les calculs.

Discussion sur l'utilisation de la calculatrice

D'une part effectuer des décompositions sans calculatrice est rapidement coûteux en calculs et il est prévisible que l'on ne demandera pas à l'élève de décomposer des multiples de nombres premiers trop grands. On a souvent remarqué que les élèves ne continuent pas les recherches au-delà de la division par 11 ou 13. Avec la calculatrice, on peut proposer des cas plus complexes : 211, 221. Le désavantage est que dans ce cas, diviser étant devenu facile, l'élève ne soit plus poussé à utiliser des propriétés pour limiter ses essais et qu'il revienne à la technique naïve, de « pêche » aux réponses. Une telle conduite régressive est souvent observée lorsque le coût de calcul est faible (Weiss & Floris, 2008). Afin d'inciter les élèves à passer de la technique « naïve » à la technique standard en exploitant les critères de divisibilité, l'enseignant pourra prévoir d'organiser des défis « qui fait le moins de divisions ? » ,voire des phases de formulation, c'est à dire des défis entre groupes avec des phases de compétition entre un représentant de chaque groupe et des phases de concertation dans les groupes selon le schéma de Brousseau dans la course à 20 (Brousseau, 1998, pages 25-41).

Quel sens donner à la décomposition ?

Les activités, NO48 et NO49 sont proposées dans le livre de 9ème afin de donner du sens à la recherche de décompositions (selon les commentaires pour le maître). Nous suggérons une démarche alternative, plus ludique, avec une exploitation de la calculatrice, adaptable à tous les niveaux, à même de travailler l'objectif du PER. Il s'agit de « plus vite à zéro » activité tirée des travaux de Kieran, C., & Guzman, J. (2007) et mise en forme pour la semaine des mathématiques genevoise de 2007 (CEM, 2007)[7].

De la décomposition à la simplification des fractions

Les réflexions effectuées ci-dessus à propos des différentes techniques se retrouvent pour la simplification de fractions :

Pour la plupart des valeurs numériques en dessous de 100, les procédures de division sont facilitées car les élèves peuvent se baser sur les tables de multiplication

63/27 = (7x9/(3x9) = 7/3

Lorsque les valeurs choisies comportent dans leur décomposition uniquement (ou presque) des puissances de 2, 3, 5 voire 11 les divisions successives sont facilitées (utilisation de critères de divisibilité) :

128/512 = 64/256 = 32/128 = 16/64 = 8/32 = 4/16 = 2/8 = 1/4

ou 450/75 = 90/15 = 18/3 = 6

ou 588/126 = 294/63 = 98/21 = 14/3

Lorsque les valeurs choisies comportent dans leur décomposition en grande partie d'autres valeurs que des puissances de 2, 3, 5 voire 11, la décomposition est favorisée, voire unique possible :

---

7 www.ssrdm.ch/ressources/activites_calc/Plus_vite_a_zero_7H13H.zip (versions doc et pdf) ou www.ssrdm.ch/ressources/activites_calc/Plus_vite_a_zero_7H13H.pdf

637/1183=(7²x13)/(7x13²)=(7x7x13)/(7x13x13) = (7/7)x(7/13)x(13/13) = 7/13

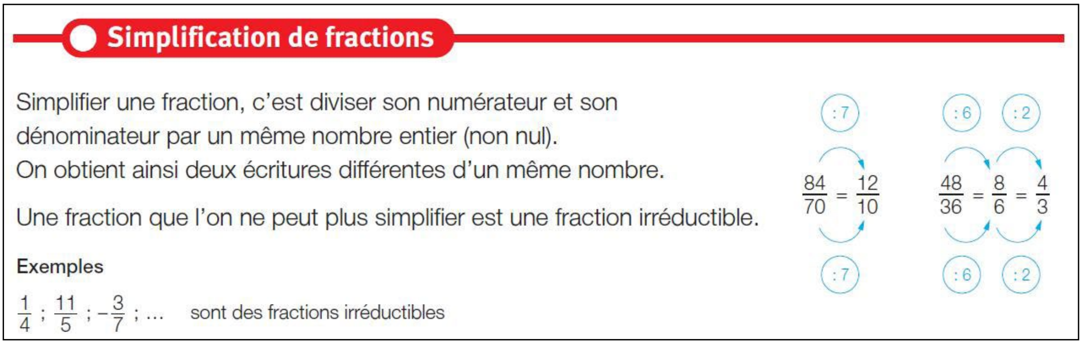
588/826=(2x294)/(2x413)=294/413=(2x3x7²)/(7x59) = 42/59[8]

(méthode mixte)

Lorsque l'une des valeurs choisies est un nombre premier connu ou obtenu dans une table, on peut immédiatement conclure à l'irréductibilité.

L'examen des exercices proposés dans le livre et le fichier de 10ème montre que la recherche de diviseurs communs peut se faire la plupart du temps sans exploiter la technique standard de décomposition. Une des conséquences de ce « choix » est qu'il n'est plus possible ainsi d'être sûr d'avoir effectivement obtenu une fraction irréductible et l'aide mémoire renforce cette ambigüité :

connaître ce que serait une technique officielle. C'est donc au maître de choisir, en déterminant précisément ses objectifs : s'il s'agit de conduire les élèves à savoir comment il est possible de décomposer n'importe quel nombre entier en facteurs premiers et à savoir le faire pour les nombres de 1 à 1000. Un travail sur la technique standard est incontournable, et la calculatrice est ici un outil permettant de se focaliser sur les mathématiques. Il en va de même à propos de l'irréductibilité des fractions. Du point de vue didactique, ce texte montre que selon les techniques que l'on utilise, et les propriétés qui les justifient, la conceptualisation mathématique peut être très différente.


Simplification de fractions

Simplifier une fraction, c'est diviser son numérateur et son dénominateur par un même nombre entier (non nul).
On obtient ainsi deux écritures différentes d'un même nombre.

Une fraction que l'on ne peut plus simplifier est une fraction irréductible.

$$\frac{84}{70} \xrightarrow{:7} \frac{12}{10} \qquad \frac{48}{36} \xrightarrow{:6} \frac{8}{6} \xrightarrow{:2} \frac{4}{3}$$

$$\frac{84}{70} = \frac{12}{10} \qquad \frac{48}{36} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

Exemples

$\frac{1}{4}$; $\frac{11}{5}$; $-\frac{3}{7}$; … sont des fractions irréductibles

Figure 4 Dans l'Aide-mémoire. Mais comment est-on sûr que l'on ne peut plus simplifier ?

De la même manière qu'avec la décomposition, la calculatrice peut être intégrée en l'associant à des valeurs numériques rendant inexploitables d'autres techniques que la technique standard, par décomposition complète d'au moins un des nombres

91/26 ; 637/1183 ; 588/826

En conclusion,

Nous avons mis en évidence différents types de techniques tant pour la recherche de nombres premiers et la décomposition de nombres entiers que pour la simplification de fractions. L'examen du PER et des ressources officielles ne permet pas de

Références

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

CIIP (2011). *Aide-mémoire (Mathématiques 9-10-11).*

DIP-Genève (2003). *CURRICULUM DE MATHÉMATIQUES 7ème 8ème 9ème.*

Weiss, L. & Floris, R. (2008). Une calculatrice pour simplifier des fractions : mise en évidence de techniques inattendues. *Petit x, 77*, 49-75.

www-irem.ujf-grenoble.fr/revues/revue_x/fic/77/77x5.pdf

8 *Il est judicieux que l'enseignant réfléchisse à l'opportunité d'abolir une écriture telle que (588:2)/(826:2), écriture qui ne fait pas de lien avec la décomposition. Sa promotion dans l'Aide-mémoire (Fig. 4) est discutable.*