Le Kasan Kurosu ou le jeu des sommes croisées (partie 1)[1]

Valentina Celi

Université de Bordeaux - IUFM d'Aquitaine - LACES, E3D

Le Kasan Kurosu[1] est un casse-tête qui, importé en 1980 des États-Unis, est toujours en vogue au Japon. Sous le nom de Kakuro, il n'est arrivé en Europe qu'en 2005. Comme un jeu dans le jeu, nous soulignons ici quelques caractéristiques mathématiques sous-jacentes au Kasan Kurosu, un casse-tête qui exploite avec désinvolture la « magie » des nombres entiers naturels.

Le *Kasan Kurosu* est un casse-tête constitué d'une grille partagée en cases **colorées** et **blanches**.

	1	2	3	4	5
A	22				
B	4				
C	2				
D	9				
E	7				
F	14	9	3	2	

Les cases **colorées** sont à leur tour partagées en demi-cases suivant une diagonale ; dans chacune de ces demi-cases, on peut trouver des nombres : par exemple, dans la grille ci-dessus, le 22 est situé dans la demi-case inférieure de la case A1 et le 14 dans la demi-case supérieure de la case F1.

Plusieurs cases **blanches** alignées verticalement ou horizontalement constituent une **série**, le nombre de cases par série étant supérieur ou égal à 2. Dans la grille ci-dessus, les quatre cases B1, C1, D1 et E1 forment une **série verticale** correspondant au 22 alors que les trois cases F2, F3 et F4 forment la **série horizontale** correspondant au 14.

L'objectif du jeu est de remplir les séries de cases blanches en respectant les règles que nous allons énoncer après avoir fourni quelques détails sur son histoire.

Un peu d'histoire

Lorsque l'on recherche les origines d'un jeu, il est difficile de distinguer les informations qui relèvent de la fantaisie de celles qui s'appuient effectivement sur la réalité des faits. Nous ne reportons ici que les éléments qui, au cours de nos recherches, revenaient le plus souvent et qui nous semblent les plus vraisemblables.

Connu d'abord sous le nom de *Cross Sums*, ce jeu est apparu aux États-Unis vers la fin des années 1960[2], la première grille ayant été publiée dans le *Dell Magazines*. Dans les années 1980, Maki Kaji, homme d'affaire japonais, fondateur et président de la maison d'édition *Nikoli Puzzles* de Tokyo, a emporté ce casse-tête au Japon où il est devenu célèbre – et encore en vogue – sous le nom de *Kasan Kurosu*, une locution qui lie le terme japonais « somme » avec une adaptation phonétique du terme anglais « cross » ; les Nippons le connaissent aussi sous le nom de *Kakro*.

En Europe, ce casse-tête est arrivé en 2005. Notamment, le 14 septembre 2005, *The Guardian*, journal britannique, a publié la première grille du célèbre casse-tête japonais sous le nom de *Kakuro* [3]. En Italie, c'est le 5 novembre 2005 que *Il Corriere della Sera* l'a fait connaître à ses lecteurs [4][3].

1 *La deuxième partie de cet article paraîtra dans le prochain numéro de Math-Ecole*

2 *D'après [3], le jeu est apparu aux États-Unis en 1950 ; néanmoins, c'est la date que nous reportons ici qui est donnée dans la majeure partie des documents consultés.*

3 *Le Corriere della Sera a abandonné sa rubrique Kakuro en 2007. A la connaissance de la rédaction de Math-Ecole, ce jeu n'a pas été repris par les journaux de Suisse romande, mais il a paru dans la Neue Zürcher Zeitung en 2006.*

Plus loin, nous vous proposons quelques grilles mais vous invitons à aller en découvrir d'autres dans les petits ouvrages vendus en librairie ; vous pouvez également vous promener sur le web : il y a de plus en plus de sites consacrés au *Kakuro*, en particulier, le site http://www.conceptispuzzles.com qui présente une variété de formes de grilles.

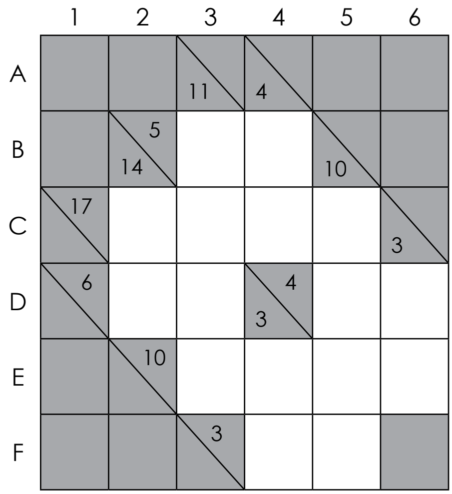
Les règles du jeu

Règle 1. Il s'agit de placer les nombres de 1 à 9 (le zéro est exclu) dans une série de cases blanches, un seul nombre par case. La somme de ces nombres est égale au nombre figurant dans la demi-case colorée correspondante[4].

Règle 2. Tous les nombres de 1 à 9 sont utilisables mais, dans une série, un nombre n'apparaît qu'une seule fois.

Une grille à compléter

Munissez-vous d'un crayon à papier, d'une gomme, d'un peu de patience et, en tenant compte des conseils qui suivent, essayez de compléter la grille 6 x 6 ci-dessous.



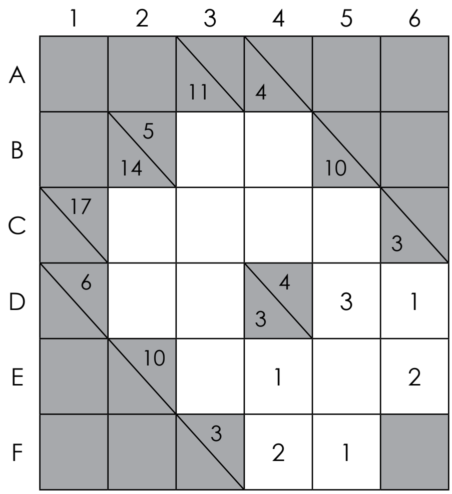
Grille 1

Repérez d'abord les nombres correspondant à des séries de deux cases, celles-ci étant en principe les plus simples à remplir. Notamment, ici, on précise que :

- dans la case colorée A4, le 4 correspond à une série verticale ;
- dans B2, le 5 correspond à une série horizontale et le 14 à une série verticale ;
- dans C6, le 3 correspond à une série verticale ;
- dans D1, le 6 correspond à une série horizontale ;
- dans D4, le 4 correspond à une série horizontale et le 3 à une série verticale ;
- dans F3, le 3 correspond à une série horizontale.

Parmi toutes ces cases, on peut choisir d'abord celles qui contiennent le 3 et le 4. En effet, dans le respect des règles, on s'aperçoit qu'il y a une seule possibilité de décomposer 3 en la somme de deux nombres, soit 1+2 ; de même, il y a une seule possibilité de décomposer 4 en la somme de deux nombres, soit 1+3 (2+2 étant une série non acceptable car, d'après la règle (2), dans une série, les nombres ne se répètent pas)[5].

La manière d'ordonner les nombres constituant ces séries a une importance (1+2 ou 2+1 ? 1+3 ou 3+1 ?) : si l'on commence, par exemple, en remplissant D5, D6 et E6, on s'aperçoit que, en D6, le seul nombre possible est le 1 car, dans les séries de deux cases correspondant à 3 et 4, le 1 est le seul nombre commun ; par conséquent, en D5, on placera le 3 et, en E6, le 2.



Grille 2

On pourrait ensuite observez que, en E4, on

4 *Par la suite, pour ne pas alourdir le texte, nous serons amenés à identifier la demi-case colorée avec le nombre figurant dans celle-ci.*

5 *Nous approfondissons dans le chapitre « Analyse du jeu » la notion de série unique.*

ne peut placer que le nombre 1 … Ou alors s'intéresser aux séries correspondant aux deux 10 figurant respectivement dans E2 et B5 : comment décomposer 10 en la somme de quatre nombres différents ? Ou encore travailler sur les séries de cases correspondant à 14 (dans B2) et à 6 (dans D1) : ces deux nombres ont une case commune …

Analyse du jeu

Après avoir fourni les règles du *Kakuro* ainsi que quelques conseils sur la manière de commencer à remplir une grille donnée, nous vous proposons une promenade numérique, une sorte de jeu dans le jeu, durant laquelle nous mettrons en évidence quelques propriétés **P** mathématiques sous-jacentes.

P1. Le nombre de cases blanches correspondant à une demi-case colorée

Dans une grille, la série de cases blanches la plus courte peut être constituée de deux cases. Puisque l'on ne dispose que de neuf nombres qui ne peuvent pas se répéter, la série la plus longue est constituée de neuf cases.

Précisons qu'*une série de n cases blanches* correspondant à une demi-case colorée peut être constituée d'un des *arrangements*[6] *de n éléments de* E = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}, avec 2≤n≤9.

P2. Le plus petit et le plus grand nombre contenus dans les cases colorées

Le plus petit nombre que l'on peut trouver dans une demi-case colorée est le 3 : on exclut le 1 car les séries constituées d'une seule case n'existent pas et le 2 car la seule série de deux cases correspondant à 2 serait constituée de deux nombres qui se répètent.

La série la plus longue correspond au plus grand nombre que l'on peut trouver dans une demi-case colorée : il s'agit donc du 45, somme des nombres de 1 à 9. Pour que le nombre 5 figure dans une des demi-cases colorées d'une grille, il faut donc que la grille ait au moins dix cases (sur la largeur ou sur la longueur).

6 *Un arrangement est une permutation de n éléments pris parmi k éléments distincts (n≤k). Les éléments sont pris sans répétitions et sont ordonnés. Ici, k=9 et 2≤n≤9.*

P3. Le plus petit et le plus grand nombre que l'on peut trouver dans une demi-case colorée correspondant à une série de *n* cases

Soit ***n*** le nombre de cases constituant une série. Suivant les règles du jeu, on a la plus petite série pour *n*=2 et la plus grande pour *n*=9 (cf. 1). Suivant les valeurs de *n* possibles, on peut déterminer :

a) le nombre *p* le plus petit que l'on peut trouver dans une demi-case colorée correspondant à une série de *n* cases ;

b) le nombre *G* le plus grand que l'on peut trouver dans une demi-case colorée correspondant à une série de *n* cases ;

c) les valeurs de *n* pour lesquelles des nombres n'ont pas de séries correspondantes.

Le tableau 1 résume les résultats relatifs à *p* et *G*, *p* valant la somme des *n* premiers entiers naturels consécutifs non nuls pour *n* = 2, …9 et *G* valant la somme des n nombres précédents 10.

N	*p*	G
2	**3**=1+2	**17**=9+8
3	**6**=1+2+3	**24**=9+8+7
4	**10**=1+2+3+4	**30**=9+8+7+6
5	**15**=1+2+3+4+5	**35**=9+8+7+6+5
6	**21**=1+2+3+4+5+6	**39**=9+8+7+6+5+4
7	**28**=1+2+3+4+5+6+7	**39**=9+8+7+6+5+4+3
8	**36**=1+2+3+4+5+6+7+8	**44**=9+8+7+6+5+4+3+2
9	**45**=1+2+3+4+5+6+7+8+9	

Tableau 1 : valeurs de p et de G pour chaque valeur de n (nombre de cases)

Par exemple, 3 est le plus petit nombre correspondant à une série de 2 cases et 17 est le plus grand. Si N est le nombre ayant une série correspondante de *n* cases, on a :

- à aucun nombre N>17 ne correspond une série de 2 cases ;
- à aucun nombre N<6 et N>24 ne correspond une série de 3 cases ;
- à aucun nombre N<10 et N>30 ne correspond une série de 4 cases ;
- à aucun nombre N<15 et N>35 ne correspond une série de 5 cases ;

- à aucun nombre N<21 et N>39 ne correspond une série de 6 cases ;
- à aucun nombre N<28 et N>42 ne correspond une série de 7 cases ;
- à aucun nombre N<36 et N>44 ne correspond une série de 8 cases ;
- à aucun nombre N<45 ne correspond une série de 9 cases.

Si le nombre 45 est le seul ayant une série correspondante de neuf cases, la série indiquée est la seule possible.

Grâce à ce tableau, nous pouvons identifier les intervalles pour lesquels les nombres ont des séries correspondantes de n cases. Le tableau 2 ci-après donne explicitement ces intervalles.

P4. Les séries uniques

Comme nous l'avons déjà souligné, une série de *n* cases correspondant à une demi-case colorée donnée peut être constituée d'un des arrangements de *n* nombres (2≤*n*≤9) pris parmi les éléments de l'ensemble E = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}. Par exemple, la série de deux cases correspondant à 5 peut être constituée d'un des quatre arrangements 1+4, 4+1, 2+3 et 3+2. Si l'on ne tient pas compte de l'ordre – et, alors, si l'on s'intéresse aux combinaisons[7] de *n* éléments de E – la série de deux cases correspondant à 5 équivaut aux deux combinaisons 1+4 et 2+3.

Finalement, pour réussir au *Kakuro*, il suffit de déterminer les combinaisons de nombres dont la somme est égale au nombre figurant dans une demi-case colorée, l'ordre de ces nombres sera alors donné par l'ensemble de la grille.

En outre, il est utile de mettre en évidence les nombres (figurant dans une demi-case colorée) correspondant à des séries uniques. Par exemple, la série de deux cases correspondant à 3 est constituée de la seule combinaison 1+2. Nous dirons qu'**une série** de *n* cases correspondant à une demi-case colorée donnée **est unique si elle n'équivaut qu'à une seule combinaison**.

n / N	2	3	4	5	6	7	8	9
3	U							
4	U							
5	0	U						
6	0	U						
7	0	0						
8	0	0						
9	0	0						
10	0	0	U					
11	0	0	U					
12	0	0	0					
13	0	0	0					
14	0	0	0					
15	0	0	0	U				
16	U	0	0	U				
17	U	0	0	0				
18		0	0	0				
19		0	0	0				
20		0	0	0				
21		0	0	0	U			
22		0	0	0	U			
23		U	0	0	0			
24		U	0	0	0			
25			0	0	0			
26			0	0	0			
27			0	0	0			
28			0	0	0	U		
29			U	0	0	U		
30			U	0	0	0		
31				0	0	0		
32				0	0	0		
33				0	0	0		
34				U	0	0		
35				U	0	0		
36					0	0	U	
37					0	0	U	
38					U	0	U	
39					U	0	U	
40						0	U	

7 Une combinaison de n éléments pris parmi les k éléments d'un ensemble E est un sous-ensemble de n éléments de E. Les éléments sont pris sans répétitions et ne sont pas ordonnés. Ici, k = 9 et 2 ≤ n ≤ 9.

41						U	U	
42						U	U	
43							U	
44							U	
45								U

Tableau 2 : nombres N ayant des séries correspondantes de n cases pour chaque valeur de 2 à 9

Dans le Tableau 2, tous les nombres *p* et *G* correspondent à des séries uniques mais ce ne sont pas les seuls ! Le Tableau 2 nous aide à déterminer tous les nombres correspondant à des séries uniques pour $2 \leq n \leq 7$: il s'agit des deux premiers plus petits et des deux derniers plus grands nombres correspondant à chacune des séries possibles[8].

Le tableau 2 donne les nombres *N* ayant des séries correspondantes de *n* cases pour chaque valeur de 2 à 9 : le « O » indique la présence de la série ; le « U » indique la présence de la série unique.

Par exemple, si l'on considère n=2, on a 3=1+2 : 1+2 est donc la seule série de deux nombres correspondant à 3. Pour passer de 3 à 4, on ajoute 1 : 4=3+1=1+2+1=1+(2+1)=1+3, la seule série de deux cases correspondant à 4 est 1+3 (le 1 que l'on ajoute à 3 pour passer à 4 ne peut être associé que d'une seule manière car si l'on considère 4=1+2+1=1+1+2=(1+1)+2, on obtient une série avec deux nombres qui se répètent).

On peut vérifier facilement que les séries des deux cases correspondant à 5 jusqu'à 15 ne sont pas uniques. Nous laissons cette vérification au lecteur, cet exercice étant utile pour remplir les grilles du *Kakuro*.

Pour que 16 soit la somme de deux nombres, si l'un des termes est 9, on aura 16=9+7 ; on ne considère pas 8 car, dans une série, les nombres ne doivent pas se répéter. Pour passer de 16 à 17, il suffit d'ajouter 1 (16+1=7+9+1) d'où la seule possibilité est 17=8+9.

Le tableau 2 donne tous les nombres *N* ayant des séries correspondantes de *n* cases pour chaque valeur de 2 à 9 : le « O » indique la présence de la série et le « U » indique la présence de la série unique.

Pour n=9, nous avons déjà signalé qu'il existe une seule combinaison possible, à savoir celle constituée des nombres de 1 à 9 dont la somme est égale à 45.

On passe de 45 à 44, en ôtant 1 : 44=45–1

=1+2+3+4+5+6+7+8+9–1=2+3+4+5+6+7+8+9 d'où l'on conclut que 44 correspond à une série unique de huit cases (on ne peut pas soustraire le 1 à aucun des autres nombres car, dans ce cas, on obtiendra un nombre qui apparaît déjà dans la série).

Avec un raisonnement analogue, on prouve que les nombres de 36 à 44 correspondent à des séries uniques de huit cases. En annexe I, nous résumons toutes les séries uniques correspondant aux nombres signalés dans le tableau 2.

P5. Les séries correspondant à deux cases blanches

Soit *n* le nombre de cases constituant une série. Nous ne considérons ici que la série en termes de combinaisons de nombres. Nous proposons de déterminer toutes les séries possibles correspondantes à 6 jusqu'à 15 lorsque n=2.

Cette analyse est utile car, en pratiquant ce jeu, on pourra s'appuyer sur celles-ci pour trouver les combinaisons de *n* nombres pour n>2.

On veut, par exemple, déterminer toutes les séries possibles correspondant à 21 lorsque n=3. On considère une première décomposition de 21 en la somme de deux nombres dont l'un constitué d'un seul chiffre (il s'agit, par exemple, d'un nombre déjà placé dans la série), soit 21=9+12=8+13=7+14=6+15

=5+16=4+17 (on s'arrête lorsque l'on trouve 17 car on sait que c'est le plus grand nombre correspondant à une série de deux cases).

Puisque 16 et 17 correspondent à des séries de deux cases uniques, on trouve tout de suite deux séries de trois cases correspondant à 21, soit 5+7+9 et 4+8+9.

Ensuite, 15 correspond aux séries 6+9 et 7+8. Cette dernière, associée à 6, fournit une autre série de trois cases correspondant à

8 Dans la suite de cet article, nous mettrons en évidence, entres autres, une curieuse symétrie à l'égard du nombre de séries possible suivant la valeur de n.

21, soit 6+7+8.

14 correspond aux séries 5+9 et 8+6 : dans ce cas, les séries de trois cases correspondant à 21 ont déjà été trouvées. De même pour 13 et 12.

Nous avons ainsi déterminé toutes les séries de trois cases correspondant à 21 : 5+7+9, 6+7+8 et 4+8+9.

Conclusions

Notre promenade autour du *Kakuro* s'arrête ici. Nos analyses ne se veulent nullement exhaustives : nous avons simplement voulu partager avec vous quelques unes des réflexions mûries en découvrant et en pratiquant un peu ce casse-tête.

En général, nous avons intentionnellement adopté un langage simple et des procédures accessibles. En envisageant une utilisation dans vos classes, certains aspects mis en évidence peuvent vous aider à réaliser vous-mêmes des nouvelles grilles et à (re) formuler des questions qui s'adaptent au niveau de vos élèves.

Principales références

[1] Lighi, L. (traduit par) (2005). *Kakuro*. éd. Bompiani

[2] Memmott, C. (2005). *In a puzzling development, kakuro beckons*. En ligne http://www.usatoday.com/life/books/news/2005-12-07-kakuro_x.htm, consulté le 22 mars 2013

[3] Guardian.co.uk (2005). *The new grid on the block*. En ligne http://www.guardian.co.uk/g2/story/0,,1569223,00.html, consulté le 22 mars 2013.

[4] Serra, E. (2005), *Il gioco che sfida il Sudoku, ecco le regole*. En ligne sur le site web http://www.corriere.it/kakuro/, consulté le 22 mars 2013.

ANNEXE I. Les séries uniques (séries de n cases correspondant aux nombres N)

N \ n	2	3	4	5	6	7	8	9
3	1+2							
4	1+3							
6		1+2+3						
7		1+2+4						
10			1+2+3+4					
11			1+2+3+5					
15				1+2+3+4+5				
16	7+9			1+2+3+4+6				
17	8+9							
21					1+2+3+4+5+6			
22					1+2+3+4+5+7			
23		6+8+9						
24		7+8+9						
28						1+2+3+4+5+6+7		

29			5+7+8+9			1+2+3+4 +5+6+8		
30			6+7+8+9					
34				4+6+7+8 +9				
35				5+6+7+8 +9				
36							1+2+3+4 +5+6+8	
37							1+2+3+4 +5+6+7+9	
38					3+5+6+7 +8+9		1+2+3+4 +5+6+8+9	
39					4+5+6+7 +8+9		1+2+3+4 +5+7+8+9	
40							1+2+3+4 +6+7+8+9	
41						2+4+5+6 +7+8+9	1+2+3+5 +6+7+8+9	
42						3+4+5+6 +7+8+9	1+2+4+5 +6+7+8+9	
43							1+3+4+5 +6+7+8+9	
44							2+3+4+5 +6+7+8+9	
45								1+2+3+4+5 6+7+8+9