

PREMIÈRE RENCONTRE « PROBLÉMATIQUE » AVEC PYTHAGORE

Jean-Marc Ellwanger & Nebih Sliman

Étudiants, Université de Genève

Selon le Plan d'Etude Romand (PER), le théorème de Pythagore peut être introduit en 10^e Hamos¹ (pour les niveaux 2-3) ou 11^e Hamos² (pour le niveau 1). Toujours selon le PER, ce théorème est l'un des plus importants. La première rencontre avec ce savoir peut se faire par une approche qualifiée de « monumentale », c'est-à-dire l'enseignant présente le savoir de manière magistrale, unilatérale aux élèves (Chevallard, 2002). L'approche « balisée » peut également être utilisée. Elle correspond à la conquête du nouveau savoir pas à pas. Chaque étape est construite de telle sorte que l'élève puisse la franchir seul, sans encombre.

Dans ce qui suit, nous proposons une première rencontre par problématisation. Dans cette approche, le théorème de Pythagore n'est ni exposé d'emblée ni dévoilé au compte-goutte. Le théorème reste caché – idéalement on ne mentionne pas que l'on introduit un nouveau savoir ni même que ce savoir porte le nom de théorème de Pythagore. Le théorème apparaît indirectement comme la clé permettant à deux frères de se réconcilier.

L'approche que nous présentons revêt deux aspects : une première partie testée en classe avec des 10^e LC³ puis une seconde partie qui correspond à des idées d'amélioration de l'activité au vu de l'analyse des productions des élèves.

1 Elèves de 13-14 ans.

2 Elèves de 14-15 ans.

3 Langues vivantes et Communication.

ÉNONCÉ DU PROBLÈME

Une maison construite sur un terrain en forme de triangle est bordée de 3 jardins de forme carrée :

- le jardin A d'aire a^2 ,
- le jardin B d'aire b^2 et,
- le jardin C d'aire c^2 .

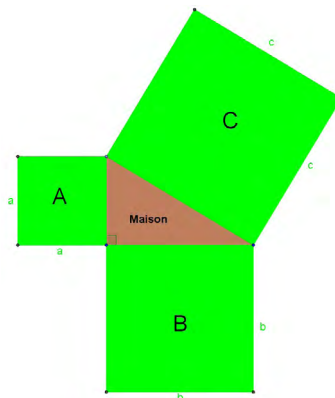


Figure 1 : Maison avec les 3 jardins A, B et C

Dans son testament, le propriétaire de la maison et des jardins lègue ses jardins à ses deux fils, Zébulon et Archibalde. Il écrit :

[...] Chacun recevra assurément une part identique de mes 3 jardins, néanmoins je ne souhaite pas voir ces beaux jardins partagés en deux. Ainsi Zébulon recevra l'entier des jardins A et B, et Archibalde recevra l'entier du jardin C.[...]

Figure 2 : Extrait du testament

Chez le notaire, les deux frères sont perplexes à la lecture de ce passage. Ils comprennent que leur père veut leur léguer la même surface mais qu'il ne voulait pas partager les jardins en deux. S'en suit une dispute. Zébulon pense que son frère a reçu plus que lui. Archibalde pense exactement le contraire.

Peux-tu aider le notaire à interpréter le testament en lui indiquant lequel des deux frères obtient finalement le plus grand jardin ?

EXPLICITATION DE L'ÉNONCÉ

Le problème décrit ci-dessus s'appuie sur trois parties facilitant la mise en activité des élèves.

1. Tout d'abord, l'histoire du partage de surface entre deux frères ainsi que sa mise en relation avec un croquis devraient sus-

citer l'intérêt des élèves. Ces histoires sont certes banales mais font appel à des souvenirs lointains de contes et de légendes.

2. On pose une **énigme**. En effet, le père lègue bien la moitié des jardins à ses fils mais ne veut pas que l'on partage les jardins en deux. Il y a là une attitude, à priori, contradictoire du père. On ne comprend pas bien ses intentions. La question qui se pose à chaque élève : pourquoi le père dit-il vouloir léguer la moitié à chacun de ses fils mais qu'il ne le fait pas ? Pourquoi ne pas simplement dire « je lègue A et B à Archibalde et C à Zébulon » ?

3. On parle d'un **conflit entre deux frères** et de la possibilité pour l'élève d'aider à sa résolution.

En termes d'intentions didactiques, on introduit les aires algébriques a^2 , b^2 et c^2 , puis on établit visuellement un lien entre le triangle et ses carrés adjacents.

PROCÉDURES DE RÉOLUTION OBSERVÉES

Dans la situation telle que présentée jusqu'à là, nous avons pu observer que les élèves de ce niveau scolaire « se précipitent » sur une procédure de résolution en particulier. Ils sortent leur règle et mesurent les côtés du triangle. Ils aboutissent à une approximation des aires et concluent que l'un des deux frères aura légèrement plus que l'autre.

A titre illustratif, nous avons construit une situation avec $a = 2$ cm et $b = 4$ cm. On sait alors que $c = 4.472135\dots$ cm (la racine de 20). Nos élèves n'ont alors eu aucune peine à mesurer a puis b , par contre ils ont dû mesurer c par approximation. Ils ont obtenu soit 4.45 cm soit 4.50 cm pour c . Selon leur approximation, ils diront que Zébulon reçoit moins que son frère ou alors exactement le contraire.

Il ressort de cette illustration qu'il est important, en termes de variables didactiques, de ne pas avoir un triplet pythagoricien du type (3,4,5) lorsque l'élève sort sa règle, mais bien un nombre irrationnel pour l'hypoténuse. En effet, nous souhaitons qu'il découvre le théorème de Pythagore et non qu'il en calcule un cas particulier en occultant ainsi, de fait, une possible généralisation.

Nous avons observé que sur une classe d'une vingtaine d'élèves après récolte des réponses au tableau noir, une demi-douzaine d'élèves s'est retrouvée partagée en deux camps comme Zébulon et Archibalde. Ils auraient pu ainsi constater les limites de cette procédure de résolution. De plus, ils auraient pu se rendre compte que la différence est très faible. En effet, $2^2 + 4^2$ vaut 20 ce qui est proche de $19.8025 (= 4.45^2)$ ou de $20.25 (= 4.50^2)$. Dans notre cas particulier, ce ne fut pas le cas. Les élèves sont restés arc-boutés sur leur résultat en argumentant que l'autre groupe avait mal mesuré l'hypoténuse. Il a fallu l'intervention de l'enseignant pour **caractériser** l'écart minime entre les résultats des deux groupes et pour susciter chez les élèves un questionnement plus global des résultats : « est-ce que le résultat ne pourrait être simplement 20 ? ».

RELANCE

Nous pensons que suite à ces observations nous pourrions structurer l'activité à ce moment-là avec une relance de l'enseignant sous la forme d'un prolongement du problème.

On pourrait être tenté ici de dire que l'on quitte la problématisation pour revenir à une sorte de balisage. Ce n'est absolument pas le cas. Les élèves ont résolu individuellement le problème mais collectivement l'obstacle n'a pas été franchi.

ÉNONCÉ DU PROBLÈME (SUITE)

Le notaire se souvient alors que le défunt propriétaire avait à l'époque gribouillé quelque chose sur deux cartons de forme carrée au sujet de ce partage. Il se souvient de les avoir consignés dans une enveloppe. Après de longues minutes de recherche dans le dossier, il retrouve cette fameuse enveloppe et en sort les deux cartons suivants :

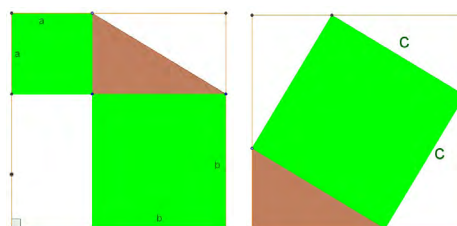


Figure 3 : Croquis des deux cartons

EXPLICITATION DE L'ÉNONCÉ

Nous pensons qu'il serait opportun de distribuer cette suite d'énoncé aux élèves avec une vraie enveloppe pour chacun d'eux dans laquelle on retrouverait ces deux cartons.

L'intérêt de la relance est de garder vive l'attention des élèves. La suite du problème comporte ainsi la mise à disposition d'un indice. L'élève deviendrait détective et, tel Sherlock Holmes, il « mènerait l'enquête ».

Les intentions didactiques seraient de permettre à l'élève de franchir l'obstacle constaté précédemment en restant dans un contexte de problématisation. A cette fin, nous choisirions en termes de variables didactiques de reprendre sur les deux cartons les couleurs précédentes pour les jardins (vert) et la maison (brun). De plus, les cartons devraient être de dimensions $a+b$ (6 cm dans le cas de notre illustration) et surtout ne pas comporter de marges. En effet, bien que les découpages soient assez naturels (ils séparent en deux le bien dévolu à Archibalde d'avec celui dévolu à Zébulon), un bord autour des grands carrés découpés donnerait une touche artificielle, voire une piste un peu trop évidente. Nous préférons ainsi avoir un découpage implicite en triangles et rectangle, qui semblerait résulter de la forme des cartons et non d'une intervention de l'enseignant.

PROCÉDURE DE RÉOLUTION ATTENDUES

Dans ce cas-ci, la procédure consistant à mesurer à la règle ayant déjà été utilisée « sans succès », les élèves seraient vraisemblablement amenés à considérer une autre procédure. Nous en détaillons deux ci-après, l'une géométrique (par découpage), l'autre algébrique.

Pour faciliter la compréhension du lecteur, nous nommons chacun des découpages des deux croquis. Nous gardons la même lettre M pour la surface brune correspondant à la maison.

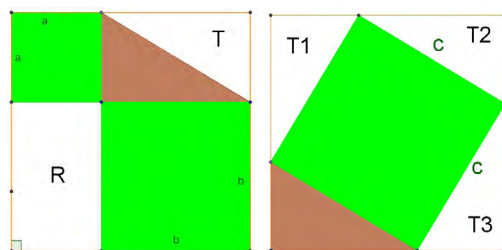


Figure 4 : carré 1 et carré 2 du croquis

PAR DÉCOUPAGE

En premier lieu, les élèves constatent visuellement que les deux grands carrés cartonnés sont de même aire. Ils procèdent ensuite par découpage. En premier, le triangle M a la même surface sur les deux croquis. Deuxièmement, T et T2 ont également la même surface. Finalement, le regroupement de T1 et T3 donne le rectangle R.

Ils en déduisent que la surface des jardins A et B est égale à la surface du jardin C, et que donc : $a^2 + b^2 = c^2$.

ALGÈBRIQUE

En premier lieu, les élèves constatent visuellement que les deux grands carrés cartonnés sont de même aire et vérifient que leurs côtés respectifs valent $a+b$. Ils modélisent algébriquement les aires des surfaces non-vertes :

Carré 1 : le rectangle R, le triangle brun M et le triangle T

$$ab + (ab)/2 + (ab)/2.$$

Carré 2 : les quatre triangles M, T1, T2, T3 de base a et hauteur b

$$(ab)/2 + (ab)/2 + (ab)/2 + (ab)/2$$

Ils en déduisent que la somme des surfaces non-vertes est égale pour les deux grands carrés et que donc : $a^2 + b^2 = c^2$.

CONCLUSION ET SUITE À DONNER

Ce prolongement devrait permettre aux élèves de découvrir ainsi par eux-mêmes la relation de Pythagore. Le savoir est cependant très fragile. En effet, la problématisation combine des notions de carrés, de triangles et de découpages, et dissimule en quelque sorte la place prioritaire du triangle. A cela s'ajoute le fait qu'à aucun moment, on ne mentionne le fait que les triangles sont rectangles.

On pourrait alors continuer la problématisation dans l'objectif de découvrir que cette relation est valable uniquement pour des triangles rectangles.

L'idée serait de leur distribuer un nouveau problème d'héritage de jardins avec toutefois une maison dont la surface n'est pas un triangle rectangle. Cette fois-ci, on choisirait un triangle dont les côtés sont des entiers, par exemple (3,4,6).

En termes de résolution, les élèves seraient probablement amenés directement à énoncer le théorème de Pythagore et à dire que le partage est équitable. L'enseignant les inviterait alors à reprendre leur règle pour faire une vérification.

Références

Chevallard, Y. (2002). Organiser l'étude : Structures et fonctions. In J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot & R. Floris (Eds.), *Actes de la 11^e école d'été de didactique des mathématiques*. Grenoble : La pensée sauvage.