A PROPOS DES NOMBRES DÉCIMAUX (PARTIE 2)[1]

André Scheibler

LES NOMBRES DÉCIMAUX DANS L'ÈRE DE LA THÉORIE DES ENSEMBLES

Considérons la présentation culturelle et classique des ensembles des nombres : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Comment pourrions-nous y glisser quelque part $\mathbb{D}$? Deux possibilités s'offrent à nous, si nous considérons $\mathbb{D}$ comme l'ensemble des nombres décimaux limités : $\mathbb{D}$ va se situer entre $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$, donc il faut proposer soit une extension de l'ensemble $\mathbb{Z}$ pour faire $\mathbb{D}$, soit une restriction de $\mathbb{Q}$ pour faire $\mathbb{D}$.

Faisons d'abord un petit rappel concernant l'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$. Cet ensemble peut se définir comme une extension de $\mathbb{Z}$, comme suit :

$\mathbb{Q} = \{a/b \ /a;b\in \mathbb{Z}, b\neq 0\}$, a/b est une écriture utilisant deux nombres de $\mathbb{N}$, a et b placés l'un au-dessus de l'autre et séparés par une barre horizontale. Il faut tout de suite une manière de traduire cette écriture en écriture décimale : ce sera le résultat de la division de a par b. A ce stade, il est donc nécessaire que cette opération de division soit définie. Quel est donc l'avantage d'écrire ces nombres uniquement à l'aide d'entiers, et de créer ainsi l'écriture fractionnaire qui exigera, en contre partie, un nouvel apprentissage des opérations de calcul avec cette écriture ? C'est certainement qu'avec elle, l'opération de division s'avère d'une extrême simplicité !

Mais revenons à nos décimaux, et commençons par les décrire par une restriction de $\mathbb{Q}$:

$$(1)\ \mathbb{D}=\{x \in \mathbb{Q} / \exists p \in \mathbb{N} / x.10^p \in \mathbb{Z}\}$$

Traduisons cette formule : $\mathbb{D}$ égale l'ensemble des nombres x appartenant à $\mathbb{Q}$ tels qu'il existe un nombre p (au moins un) appartenant à $\mathbb{N}$ tel que si l'on multiplie x par 10^p, le résultat est un nombre entier.

Ce qui est très économique mais assez expéditif, puisque cette définition en fait ne montre rien de ces x particuliers si on ne les connaissait déjà. Une autre définition apportera plus d'informations :

(2) $\mathbb{D}=\{a/b \in \mathbb{Q}$ avec (a;b) premiers entre eux$/\exists\, n;m\in \mathbb{N} \ /b=2^n \bullet 5^m\}$

Traduction : $\mathbb{D}$ ce sont toutes les fractions rationnelles et réduites de $\mathbb{Q}$ dont le dénominateur se décompose en produits de facteurs uniquement égaux à 2 et/ou 5. C'est déjà plus opérationnel. La division de a par b est alors une division exacte, dont le reste est 0. Par exemple, la fraction 39/960 qui se réduit en 13/920 = $13/(2^6 \bullet 5^2)$ qui correspond, après division, à 0,040625.

Si l'on recherche maintenant une deuxième définition de $\mathbb{D}$, mais cette fois par extension de $\mathbb{Z}$, il suffit de se ramener aux propositions de Stevin (exposées dans le Math-Ecole 219 et que nous rappelons) :

> *...chaque nombre de Disme étant en fait déterminé par un couple d'entiers, le premier formé de tous les chiffres utilisés, dans l'ordre, sans omettre de zéro en cas de défaillance d'un signe, le second étant le signe du dernier chiffre. 8(0)9(1)3(2)7(3) est traité comme le couple (8937 ; 3).*

Une autre définition en extension, plus formelle, est proposée dans l'Annexe I.

QUELQUES COMMENTAIRES À PROPOS DES DIFFÉRENTES DÉFINITIONS DE $\mathbb{D}$

1. Stevin vise, en imposant des rompus tous égaux à la dixième partie, une uniformisation de l'écriture des nombres pour la plupart des corps de métier, et par là une grande facilitation du calcul. Lebesgue veut définir une écriture de tous les nombres associés à la mesure de longueur de tout segment, et c'est une procédure de cette mesure qui définit le nombre. Les définitions plus formelles enfin disent les propriétés des nombres qui sont décimaux parmi les nombres rationnels $\mathbb{Q}$.
2. La numération en base 10 est responsable de la singularité de cet ensemble. La présence de 10^p dans la première formule et celle de $2^n \bullet 5^m$ dans la deuxième expriment bien cette singularité.
3. La décomposition de b, le dénominateur

1 La première partie de cet article est parue dans le numéro 219.

de a/b, en produits de facteurs premiers strictement égaux à 2 ou 5 donne du grain à moudre à toute méthode qui voudrait faire une place aux décimaux dans un enseignement. La décomposition en produits de facteurs du dénominateur fournit une méthode élégante, au détriment d'une division de a par b qui de temps en temps "finit", et de temps en temps (mais quand ?) ne "finit" pas[2].

4. Les définitions des mathématiciens ensemblistes nous apparaissent ici très abstraites. Elles sont aussi le fruit d'une époque, qui s'est appelée « mathématiques modernes », dans laquelle la théorie des ensembles a pris une place importante. L'étude des ensembles de nombres, et l'ambition d'en faire LA base de tout l'édifice mathématique – l'enseignement de la géométrie d'Euclide a même failli disparaître à ce moment-là - sont les causes d'une distance volontairement marquée avec un côté pratique de l'usage des mathématiques, et des nombres en particulier. Alors que Stevin insiste sur ce côté pratique, et Lebesgue ici fait d'une procédure de mesure de segments une définition, qui correspond à la définition de nombre réel apparue dans la version actuelle de l'aide-mémoire des ressources d'enseignement romand :

Un nombre décimal est un nombre dont l'écriture décimale possède un nombre fini de chiffres non nuls après la virgule. C'est le quotient d'un nombre entier par une puissance de dix.

5. Je laisse enfin le soin au lecteur d'aller rechercher dans les ressources qu'il utilise dans son enseignement, ou dans sa démarche personnelle de traiter les différentes écritures des nombres, la place qui y est faite ou non à l'ensemble $\mathbb{D}$ des nombres décimaux. L'objectif de cet article est de l'aider dans cette démarche.

Calculs avec les nombres décimaux

Je ne traiterai ici que de l'opération de division, parce qu'elle joue un rôle clé dans l'étude des nombres décimaux. Le lecteur démontrera facilement qu'additionner, soustraire ou multiplier deux nombres décimaux donne un décimal. Ce n'est pas le cas de la division.

La division euclidienne dans $\mathbb{D}$ existe-t-elle ?

Il est fréquent, dans l'enseignement et dans les méthodologies utilisées, de traiter en parallèle l'ensemble des décimaux $\mathbb{D}$ et celui des nombres rationnels $\mathbb{Q}$. Cet ensemble est présenté souvent comme l'ensemble des fractions où a et b sont des nombres entiers puisés dans $\mathbb{Z}$ avec b différent de 0. L'isomorphisme de $\mathbb{Q}$ en écriture fractionnaire avec les nombres décimaux illimités dits rationnels (ou nombres périodiques) exige un algorithme de passage d'une écriture à l'autre, et c'est bien sûr la division qui va remplir ce rôle. Revenons alors sur la définition de la division euclidienne dans $\mathbb{N}$:

Soit (a ; b), $(a;b)\in(\mathbb{N} \times \mathbb{N}^*)(b\neq 0)$

Alors il existe $(q,r) \in (\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ tel que $a=b\bullet q+r$ et $0 \leq r < b$

q est appelé quotient et r reste de la division euclidienne.

Il faut relever que la division euclidienne n'est pas une opération comme les autres, puisque sa réponse n'est pas un nombre, mais deux. Et ces deux nombres sont soumis à deux conditions, qui exigent les définitions de deux opérations, + et • , et l'existence d'une relation d'ordre total.

Au premier abord, on se dit que cela ne va pas poser de problème dans $\mathbb{D}$, puisque nous avons ces définitions et cette relation d'ordre. Il va suffire de transposer l'algorithme connu sur $\mathbb{N}$. C'est bien ce que la plupart des calculateurs font, en invoquant un théorème démontré facilement sur $\mathbb{Q}$:

Si l'on multiplie dividende et diviseur par un même nombre, le quotient ne change pas.

En prenant plus de précaution :

Soit $a,b,f \in \mathbb{Q}$, b et f non nuls,

$$\text{alors } (a/b) = (a\bullet f)/(b\bullet f)$$

La démonstration complète dans $\mathbb{Q}$ va évidemment faire appel à la définition de cet ensemble, et aux règles dites de simplification de fractions.

Le problème est que, si l'on veut définir une

2 *Cf par exemple un cas tel que a=1 et b= 97.*

division euclidienne dans $\mathbb{N}$, on peut bien faire usage du théorème ci-dessus, valable dans $\mathbb{Q}$, mais ce théorème ne dit rien du reste !

Pour cette division, on propose donc souvent aux élèves de multiplier dividende et diviseur par la bonne puissance de 10, afin qu'ils deviennent tous deux des entiers, et d'effectuer la division. Le nombre d'unités du quotient trouvé, on « continue », en ajoutant un zéro à droite du dividende, pour figurer la décimale suivante. Les élèves, lancés dans cette opération, posent souvent la question : « On s'arrête quand, Madame? » Ayant obtenus réponse (mais que leur répondez-vous ?) ils fournissent quasiment dans tous les cas le dernier nombre entier obtenu « quand on s'arrête », comme reste de la division. Par exemple :

0,7 divisé par 0,3

$$\begin{array}{l|l}
7 & 3 \\ \cline{2-2}
6 & 2{,}33 \\ \cline{1-1}
10 & \\
09 & \\ \cline{1-1}
010 & \\
009 & \\ \cline{1-1}
001 &
\end{array}$$

Réponse : quotient =2,33 ; reste 1

Or :

$0{,}3 \bullet 2{,}33+1 \neq 0{,}7$ et 1 n'est pas compris entre 0 et 0,3.

Tous les enseignants et les lecteurs attentifs ont bien entendu reconnu l'erreur, $r = 0{,}001$ et les deux conditions sont vérifiées pour 0,7 divisé par 0,3. Pour définir donc notre division euclidienne, il faut un élément supplémentaire, celui qui répond à la question des élèves : « Quand s'arrête-t-on ? ». Il faudra alors définir ce que l'on pourrait appeler la « décimalité » d'un nombre de $\mathbb{D}$.

Cette « décimalité » peut être le dernier signe non nul que Stevin attribue à l'écriture de ses nombres. Par exemple, 3 serait la décimalité de 8(0)9(1)3(2)7(3) (en notation actuelle : 8,937).

Cette « décimalité » peut être intégrée dans l'algorithme de division, en fixant a priori l'arrêt, par exemple à 10^{-3}. Il serait également nécessaire de noter la décimalité à chaque étape une fois terminé la partie de l'algorithme dans les entiers.

Dans l'Annexe III, nous proposons des éléments formels qui peuvent permettre de fonder l'élargissement de la division euclidienne à $\mathbb{D}$, l'ensemble des décimaux.

Infiniment petit, infiniment grand

A celui qui s'intéresserait à la définition d'ensembles de nombres et à leurs différentes écritures, ce qui vraisemblablement le conduirait à des questions concernant l'infiniment petit ou l'infiniment grand, je propose la lecture du livre « La notion d'infini » de Thérèse Gilbert et Nicolas Rouche.

Cet ouvrage, tout à fait abordable pour un non spécialiste en mathématiques, propose une excellente approche de la notion d'infini, illustrée par de nombreux textes historiques. Le lecteur pourra constater que de virulents échanges jalonnent toute l'histoire à propos de la nature des objets mathématiques. Les auteurs mettent très bien en évidence des paradoxes concernant ces objets, paradoxes qui d'une certaine manière subsistent encore aujourd'hui, d'un point de vue philosophique.

Cette approche de la notion d'infini est particulièrement bien adaptée pour des enseignants. Ils vont constater que des questions fondamentales, comme par exemple : peut-on fabriquer une droite avec des points ? Y-a-t-il du vide entre les points ? Comment se touchent-ils ? etc., questions qu'ils se posent peut-être eux-mêmes, et qui pourraient occuper de temps à autre les pensées de leurs élèves, et bien ces questions ont été aussi celles de grands savants. Cette approche ne prend pas la forme sèche d'un discours historique, elle est essentiellement alimentée de problèmes. En voici un exemple (p. 225-226) pour conclure, qui nous fait revenir au fameux nombre 0,999..., qu'Henri Lebesgue excluait de ses nombres décimaux illimités :

Que pensez-vous des arguments intervenant dans le dialogue suivant ? Imaginez-en la suite.

LE PROFESSEUR. Le nombre s'écrivant 0,999..., avec une infinité de 9, est égal à 1.

L'ETUDIANT. Non, ce n'est pas possible ! Ce sont deux nombres différents. Cela se voit :

ils ont des écritures différentes.

PROF. S'ils sont différents, donnez-moi leur différence.

ET. La différence est le nombre 0,000...1, avec une infinité de zéros avant le 1.

PROF. Mais il y a une infinité de zéros, vous n'arriverez jamais à la dernière décimale, à savoir 1.

ET. C'est comme pour votre 0,999..., vous n'arriverez jamais au bout de votre infinité de 9. Donc le dernier 9 n'apparaissant pas, 0,999... ne sera "jamais" égal à 1.

PROF. Moui... Autre chose : si ces deux nombres sont différents, vous devez pouvoir trouver un nombre entre les deux, et même une infinité de nombres...

ET. Il suffit, par exemple, de calculer la moyenne des deux. Leur somme valant 1,999..., la moyenne sera 0,999...5, avec une infinité de 9 avant le 5. En effet :

1,9/2 = 0,95 ; (1,99/2) = 0,995, etc.

Sur quoi se basait ce professeur pour lancer son affirmation ? Probablement sur cette démonstration :

$10 \bullet 0{,}999\ldots = 9{,}999\ldots$

$1 \bullet 0{,}999\ldots = 0{,}999\ldots$

Donc $10 \bullet 0{,}999\ldots - 1 \bullet 0{,}999\ldots = 9$

Donc $9 \bullet 0{,}999\ldots = 9$ alors $1 \bullet 0{,}999\ldots = 1$

Cela semble lui donner raison. Mais les arguments de l'étudiant ne sont-ils pas pertinents ?

Bibliographie

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques,* Grenoble : La pensée sauvage.

Gilbert, T. & Rouche, N. (2001). *La notion d'infini*, Ellipses, Paris.

Goldstein, C. (2012). *Les fractions décimales : un art d'ingénieur ?* HAL : hal-00734932, version 1 cf http://hal.archives-ouvertes.fr/index.php?halsid=dhb78dii8ggjg8u43uq2lqhn23&view_this_doc=hal-00734932&version=1

Lebesgue, H.-L. (1915). *Sur la mesure des grandeurs,* A. Kundig, Genève.

Le Lionnais, F. et al.(1979). *Dictionnaire des mathématiques,* Paris : PUF.

Stevin, S. (1585). *La Disme,* http://adcs.home.xs4all.nl/stevin/telconst/10sme.html

CIIP (2011). *Aide-mémoire (Mathématiques 9-10-11).*

Annexe 1 : définition ensembliste de $\mathbb{D}$

Considérons dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ la relation d'équivalence ~ suivante :

$$(a,n) \sim (b,p) \text{ ssi } a \bullet 10^p = b.10^n$$

La classe (a,n) est notée $(a/10^n)$

Alors $\mathbb{D}$ est l'ensemble-quotient

$$\mathbb{D} = \mathbb{Z} \times \mathbb{N} / \sim$$

Il nous faudra un petit effort pour comprendre toutes les subtilités de cette définition. D'abord les objets ainsi présentés ne ressemblent pas à nos nombres habituels, avec une virgule, mais ce sont des couples de nombres entiers. La notation $(a/10^n)$ permet heureusement de nous ramener à des choses plus connues. Reste bien entendu à définir les opérations + et • avec de tels objets. Nous laissons au lecteur le soin d'étudier un peu cet ensemble de couples qui ne sont constitués que par des entiers, de chercher à écrire un ensemble de couples équivalents selon la relation d'équivalence ~, de définir les couples qui sont résultats d'une opération d'addition et de multiplication.

Annexe II : division euclidienne généralisée

Lorsque, de façon plus générale, nous cherchons à étendre la division euclidienne sur d'autres ensembles que $\mathbb{N}$ comme $\mathbb{D}$ bien sûr, mais aussi $\mathbb{Z}$, $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes, $\mathrm{K}[x]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans un corps K, et enfin tout ensemble possédant une structure d'anneau, il va falloir introduire une nouvelle fonction, que l'on appelle stathme.

Soit A un ensemble ayant une structure d'anneau. Le stathme de A est une fonction de A* dans $\mathbb{N}$ permettant d'y introduire une nouvelle relation d'ordre (il n'y en a a priori pas sur l'ensemble des polynômes $\mathrm{K}[x]$ par exemple). Deux éléments de A seront alors ordonnés selon l'ordre de leurs images par la fonction stathme. Voici quelques exemples :

- 1) Division euclidienne dans $\mathbb{Z}$: le stathme de $\mathbb{Z}$ est tout simplement la fonction :

$$\varphi:\mathbb{Z}^*\rightarrow\mathbb{N}$$

$\varphi(a)=/a/$ l'image de a est la valeur absolue de a.

On peut alors définir une division euclidienne sur $\mathbb{Z}$:

Soit $(a,b)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$, , alors il existe un couple $(q,r)\in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ tel que $a=b\bullet q+r$ et $\varphi(r)\leq\varphi(b)$soit $/r/</b/$

(le reste peut être négatif dans une division euclidienne dans $\mathbb{Z}$).

2) Division euclidienne dans l'ensemble des polynômes à une lettre x à coefficients dans $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}[x]$:

Les polynômes réduits sont ordonnés par valeurs décroissantes des degrés des monômes, le stathme d'un polynôme sera alors évidemment son degré. Le degré du reste sera strictement plus petit que le degré du diviseur. Si le degré du dividende est plus petit que le degré du diviseur, le quotient égale 0 et le reste est égal au dividende.

Mais au fait, les nombres décimaux peuvent aussi s'écrire comme des polynômes ordonnés par valeurs décroissantes ! Hélas, on ne pourra pas diviser de tels polynômes avec les mêmes règles que dans $\mathbb{Q}[x]$, les coefficients étant des entiers. Et si vous divisez un entier par un entier...

Annexe III : algorithme de division euclidienne avec décimalité

Nous proposons ici des éléments qui peuvent permettre de fonder l'élargissement de la division euclidienne à $\mathbb{D}$, l'ensemble des décimaux. Pour cela, il faut bien entendu fixer la décimalité du quotient.

Soit un triple (a ; b ; n) où $(a;b)\in \mathbb{D}\times\mathbb{D}^*$ et $n\in\mathbb{N}$.

Alors il existe un unique couple tel que :

$(q,r)\in \mathbb{D}\times\mathbb{D}$ tel que $a = b\bullet q + r$

avec décimalité de $q=n$ et $0\leq r<b/10^n$, la décimalité du reste étant égale à la décimalité de b + n.

Reprenons notre exemple : 0,7 divisé par 0,3 décimalité de q =2 : alors la décimalité du reste sera égale à 1 + 2 = 3 et r est compris entre 0 et $0,3/(10^2)= 0,003$.

On le constate, cette définition s'écarte un peu de la stricte définition de la division euclidienne dans $\mathbb{N}$. Il a fallu introduire une nouvelle fonction, la décimalité. Et si nous avons maintenant une définition, il reste encore à adapter l'algorithme de division pour déterminer q et r correctement. Le lecteur s'en chargera s'il ne veut pas abandonner à la calculette seule ce type d'opération. Mais que fait réellement la calculette ?