Répartitions des sièges en politique au système proportionnel

Augustin Genoud[1]

En politique, la répartition des sièges lors d'une votation peut être faite de plusieurs manières : en utilisant la règle de la majorité, en répartissant les sièges proportionnellement aux nombres de suffrages obtenus ou encore en mixant système majoritaire et système proportionnel. Du point de vue mathématique, le système proportionnel est très intéressant. C'est celui qui fait l'objet de cet article qui présente les deux méthodes les plus souvent utilisées dans ce système ainsi qu'une troisième méthode, fruit de mon imagination. En fin d'article, quelques exercices permettront d'appliquer en classe le système proportionnel.

Trois méthodes de répartition

Répartir des sièges – donc des personnes – de manière proportionnelle aux nombres de suffrages obtenus est un véritable casse-tête mathématique (à part des cas rarissimes) car un siège ne peut être évidemment attribué qu'à une seule personne. Dès lors, les modes de répartition sont nombreux et ont tous leurs avantages et désavantages.

> Faisons ici une petite parenthèse pour dire que si on élargit le sujet à toutes les votations (système proportionnel et majoritaire), cela va devenir très vite complexe comme le prouvent les trois liens donnés ci-dessous. On peut lire la suite de l'article sans passer par ces liens.
>
> http://images.math.cnrs.fr/La-democratie-objet-d-etude.html
>
> http://images.math.cnrs.fr/Et-le-vainqueur-du-second-tour-est.html
>
> http://images.math.cnrs.fr/La-quete-du-Graal-electoral.html

1 Augustin Genoud est l'auteur du livre « Les Clefs des Enigmes Mathématiques » paru en 2013. Ce livre ainsi que diverses curiosités mathématiques sont présentés sur son site : www.jeuxmath.ch

Les deux méthodes les plus couramment utilisées pour répartir des sièges sont la méthode du **Plus Fort Reste** et celle de la **Plus Forte Moyenne** appelée aussi méthode du plus fort quotient. Dans ce qui suit, on ne tiendra pas compte du fait que, parfois, les partis n'ayant pas obtenu un pourcentage minimal de suffrages sont exclus de la répartition des sièges. D'autre part, les nombres en écriture décimale sont systématiquement arrondis au centième près. A l'aide d'un exemple, on va s'intéresser aux deux méthodes, en essayant de comprendre les enjeux mathématiques. Les règlements d'application de ces deux méthodes peuvent différer dans certains détails, généralement sans influence sur la répartition des sièges. Nous avons donc forcément fait des choix arbitraires. On découvrira ensuite une troisième méthode imaginée par l'auteur de l'article, appelons-la la méthode **Genoud**.

Neuf sièges doivent être attribués entre six partis A, B, C, D, E et F. Combien chaque parti va-t-il obtenir de sièges sachant qu'ils ont obtenu les nombres suivants de suffrages :

A : 8002 B : 4698 C : 3651

D : 2612 E : 1790 F : 1603

Dans les méthodes du Plus Fort Reste et de la Plus Forte Moyenne, la première répartition se fait de la même manière.

On effectue d'abord la somme totale des suffrages :

8002 + 4698 + 3651 + 2612 + 1790 + 1603 = 22356.

On cherche ensuite ce que l'on appelle le quotient électoral qui s'obtient en divisant la somme totale des suffrages par le nombre de sièges à distribuer. Dans notre exemple, le quotient électoral est 2484 (22356 : 9). Si ce quotient n'est pas un nombre entier, on prend la valeur approchée à l'unité, par excès.

Chaque parti va obtenir autant de sièges qu'il possède de fois le quotient électoral. C'est ainsi que dans une première répartition, on a ceci :

A 8002 : 2484 = 3,22 --> A obtient 3 sièges

B 4698 : 2484 = 1,89 --> B obtient 1 siège

C 3651 : 2484 = 1,47 --> C obtient 1 siège

D 2612 : 2484 = 1,05 --> D obtient 1 siège

E 1790 : 2484 = 0,72 --> E obtient 0 siège

F 1603 : 2484 = 0,65 --> F obtient 0 siège

On aurait pu obtenir la même répartition en faisant le tableau suivant :

Partis	Nombre de suffrages	Nombre de sièges
Total	22356	9
A	8002	3,22
B	4698	1,89
C	3651	1,47
D	2612	1,05
E	1790	0,72
F	1603	0,65

Six sièges sur neuf ont été attribués. A partir de là, les méthodes diffèrent.

Méthode du Plus Fort Reste :

Cette méthode dit qu'il faut attribuer les trois sièges restants aux partis qui sont les plus proches d'avoir obtenu un siège supplémentaire, autrement dit, ce sont ceux qui ont les plus forts restes. A a un reste de 0,22, B de 0,89, C de 0,47, D de 0,05, E de 0,72 et F de 0,65. C'est donc B, E et F qui ont chacun un siège supplémentaire. Avec cette méthode, on obtient finalement :

A = 3 sièges	D = 1 siège
B = 2 sièges	E = 1 siège
C = 1 siège	F = 1 siège

Méthode de la Plus Forte Moyenne :

Les partisans de cette méthode tiennent le discours suivant : il faut que chaque élu représente le même nombre d'électeurs (donc de suffrages). Si le parti F a un siège avec 1603 suffrages (selon la méthode du Plus Fort Reste), il faut que le parti A en ait au moins 4 car 8002 : 1603 = 4,99.

Ils proposent alors d'attribuer les trois sièges manquants selon un procédé étonnant, en procédant à autant de répartitions qu'il reste de sièges à distribuer. Cette règle est importante, il faut absolument se la rappeler. A chaque répartition, comme chaque parti revendique un siège supplémentaire, on va diviser le nombre de suffrages de chaque parti par le nombre de sièges qu'il a obtenus jusque là, augmenté d'une unité. Celui qui aura le plus grand quotient aura un siège supplémentaire.

Deuxième répartition : (chaque parti voit son diviseur augmenter d'une unité)

A 8002 : 4 = 2000,5 --> A obtient 3 sièges

B 4698 : 2 = 2349 --> B obtient 1 sièges

C 3651 : 2 = 1825,5 --> C obtient 1 siège

D 2612 : 2 = 1306 --> D obtient 1 siège

E 1790 : 1 = 1790 --> E obtient 0 siège

F 1603 : 1 = 1603 --> F obtient 0 siège

C'est B qui a le plus grand quotient (2349). C'est lui qui obtient le siège supplémentaire.

Sept sièges sont attribués. On passe à une nouvelle répartition.

Troisième répartition : (seul B voit son diviseur passer de 2 à 3)

A 8002 : 4 = 2000,5 --> A possède 3 sièges

B 4698 : 3 = 1566 --> B obtient 2 sièges

C 3651 : = 1825,5 --> C obtient 1 siège

D 2612 : 2 = 1306 --> D obtient 1 siège

E 1790 : 1 = 1790 --> E obtient 0 siège

F 1603 : 1 = 1603 --> F obtient 0 siège

C'est A qui a le plus grand quotient (2000,5). C'est lui qui obtient le siège supplémentaire.

Huit sièges sont attribués. On passe à une nouvelle répartition pour l'attribution du dernier siège.

Quatrième répartition : (seul A voit son diviseur passer de 4 à 5)

A 8002 : 5 = 1600,4 --> A obtient 4 sièges

B 4698 : 3 = 1566 --> B obtient 2 sièges

C 3651 : 2 = 1825,5 --> C obtient 1 siège

D 2612 : 2 = 1306 --> D obtient 1 siège

E 1790 : 1 = 1790 --> E obtient 0 siège

F 1603 : 1 = 1603 --> F obtient 0 siège

C'est C qui a le plus grand quotient (1825,5). C'est lui qui obtient le dernier siège.

Tous les sièges sont maintenant attribués.

La technique utilisée pour répartir les sièges dans la méthode de la Plus Forte Moyenne est surprenante. Par contre, elle peut s'appliquer aisément, par un procédé qui ne demande quasiment aucune connaissance des mathématiques.

Parfois, dans cette méthode, le quotient électoral est obtenu en divisant la somme totale des suffrages par le nombre de sièges à distribuer, plus un. Dans notre exemple, il serait égal à 2236 (22356 : 10). Ceci ne change pas la répartition des sièges mais en diminue parfois le nombre de répartitions.

Pour bien comprendre les enjeux mathématiques de cette méthode, imaginons une autre manière de distribuer les sièges, jamais utilisée en politique. Les partisans de cette méthode prétendent que si 1603 suffrages ont suffi au parti F pour obtenir un siège, il faut que dans chaque parti, tout groupe de 1603 suffrages se voie attribuer un siège. Ils font alors la répartition suivante :

Partis	Nombre de suffrages	Nombre de sièges
Total	1603	1
A	8002	4,99
B	4698	2,93
C	3651	2,28
D	2612	1,63
E	1790	1,12
F	1603	1

Avec un siège tous les 1603 suffrages, il faudrait 11 sièges en tout. Comme 1603 ne convient pas pour attribuer 9 sièges, il faut choisir un nombre supérieur à 1603 comme valeur étalon d'un siège de manière à ce que 9 sièges soient attribués. Il faut faire varier cette valeur étalon.

Supposons que la valeur étalon soit 1900. On a alors le tableau suivant :

Partis	Nombre de suffrages	Nombre de sièges
Total	1900	1
A	8002	4,21
B	4698	2,47
C	3651	1,92
D	2612	1,37
E	1790	0,94
F	1603	0,84

Cette fois, il n'y a que 8 sièges attribués. Essayons alors avec 1800. On obtient :

Partis	Nombre de suffrages	Nombre de sièges
Total	1800	1
A	8002	4,45
B	4698	2,61
C	3651	2,03
D	2612	1,45
E	1790	0,99
F	1603	0,89

Les 9 sièges sont maintenant attribués et on constate que chaque parti a obtenu le même nombre de sièges que par la méthode utilisée en politique.

En comparant les répartitions obtenues par les deux méthodes, on constate que la méthode du **Plus Fort Reste** favorise les petits partis tandis que les grands partis sont avantagés par la méthode de la **Plus Forte Moyenne**. On notera également qu'avec la méthode de la **Plus Forte Moyenne**, il arrive qu'un même parti se voie attribuer plusieurs sièges après la première répartition, ce qui n'est jamais le cas avec la méthode du **Plus Fort Reste**.

Je me suis demandé s'il n'y avait pas une autre méthode qui soit un compromis entre les deux méthodes précédentes. J'ai alors imaginé ceci :

Méthode Genoud

Elle consiste à classer les résultats des partis dans l'ordre décroissant des suffrages obtenus comme c'est déjà le cas dans notre exemple (A > B > C > D > E > F). Ensuite, on va comparer chacun des partis avec tous les partis ayant obtenu moins de suffrage.

1) A contre B + C + D + E + F, soit 8002 contre 14354 (4698 + 3651 + 2612 + 1790 + 1603).

2) B contre C + D + E + F, soit 4698 contre 9656 (3651 + 2612 + 1790 + 1603).

3) C contre D + E + F, soit 3651 contre 6005 (2612 + 1790 + 1603).

4) D contre E + F, soit 2612 contre 3393 (1790 + 1603).

5) E contre F, soit 1790 contre 1603.

Ainsi, le parti A qui a obtenu le plus de suffrages va se mesurer à tous les autres partis qui représentent 14354 suffrages :

Partis	Nombre de suffrages	Nombre de sièges
Total	22356	9
A	8002	3,22
B+C+D+E+F	14354	5,78

A doit avoir 3 sièges et tous les autres 6 (car 5,78 est plus proche de 6 que 3,22 de 4). A aura 3 sièges et les autres partis doivent se répartir 6 sièges. Maintenant, B doit être confronté à tous les partis qui ont moins de sièges que lui :

Partis	Nombre de suffrages	Nombre de sièges
Total	14354	6
B	4698	1,96
C+D+E+F	9656	4,04

B aura 2 sièges (1,96 est plus proche de 2 que 4,04 de 5) et les partis restants doivent se répartir 4 sièges. C doit être confronté à tous les partis qui ont moins de sièges que lui :

Partis	Nombre de suffrages	Nombre de sièges
Total	9656	4
C	3651	1,51
D+E+F	6005	2,49

C aura 2 sièges (1,51 est plus proche de 2 que 2,49 de 3) et les partis restants doivent se répartir 2 sièges. D doit être confronté à tous les partis qui ont moins de sièges que lui :

Partis	Nombre de suffrages	Nombre de sièges
Total	6005	2
D	2612	0,87
E+F	3393	1,13

D aura 1 siège et les deux derniers partis doivent se répartir le dernier siège. C'est forcément E qui va l'avoir car il a plus de suffrages que F. Les 9 sièges sont attribués et on a finalement :

A = 3 sièges	D = 1 siège
B = 2 sièges	E = 1 siège
C = 2 sièges	F = 0 siège

Comparons les résultats :

Partis	Nombre de sièges (Plus Fort Reste)	Nombre de sièges (Plus Forte Moyenne)	Nombre de sièges (Genoud)
A	3	4	3
B	2	2	2
C	1	2	2
D	1	1	1
E	1	0	1
F	1	0	0

La méthode Genoud est bien un compromis entre les deux méthodes traditionnelles. Elle peut paraître un peu plus compliquée du point de vue mathématique mais, si nécessaire, un programme informatique pourrait facilement être créé pour effectuer les calculs[2].

Applications dans les classes

La répartition des sièges, en politique, au système proportionnel, est fort intéressante et peut être la source de multiples exercices. Voici quelques exemples :

1. Six personnes (A, B, C, D, E et F) doivent se partager 9 kilos d'or. Combien chacune va-t-elle recevoir de grammes d'or

2 Toutes les méthodes peuvent, exceptionnellement, conduire à une impasse. Dans ce cas, le législateur a prévu des règles particulières faisant appel parfois à un simple tirage au sort.

sachant que A, B, C, D, E et F ont droit respectivement à 8002 parts, 4698 parts, 3651 parts, 2612 parts, 1790 parts et 1603 parts ?[3]

2. Trois partis politiques A, B et C ayant obtenu respectivement 64, 31 et 15 suffrages doivent se répartir 5 sièges, dans un système proportionnel. Combien chaque parti va-t-il obtenir de sièges ?

3. En remplaçant, dans l'exercice 1, les personnes par les partis, les kilos d'or par des sièges et les parts par des suffrages, on obtient l'exercice qui nous a servi de modèle dans cet article. Une fois cet exercice résolu selon les trois méthodes, on peut demander de calculer le pourcentage de suffrages que compte chaque parti par rapport au nombre total de suffrages. Ensuite, on peut demander de calculer, selon les trois méthodes, le pourcentage de sièges obtenus par chaque parti par rapport au nombre total de sièges distribués.

4. Trois partis (A, B et C) ont obtenu respectivement 600, 400 et 200 suffrages pour 5 sièges à distribuer. Combien de sièges obtiendra chaque parti ?

5. Pourquoi, dans la méthode de la Plus Forte Moyenne, la méthode de la valeur étalon et celle utilisée par les politiciens conduisent aux mêmes résultats ?

6. Jules possède trois bouts de ficelle, de longueurs respectives 64 cm, 31 cm et 15 cm. Il souhaite les couper afin d'obtenir cinq morceaux d'égale longueur x. Il désire aussi que tous les bouts de ficelle restants (ceux qui ne font pas partie des cinq morceaux de même longueur) soient plus courts que x. Quelle longueur représente x ? Combien de morceaux de longueur x va-t-on obtenir avec chacun des trois bouts de ficelle ? Quel lien y a-t-il entre cet exercice et la répartition des sièges en politique ?

7. Quatre partis politiques A, B, C et D ayant obtenu respectivement 90'000, 7900, 1606 et 494 suffrages doivent se répartir 450 sièges, dans un système proportionnel utilisant la méthode du plus fort reste. Combien chaque parti va-t-il obtenir de sièges ? Combien chaque parti aurait-il obtenu de sièges s'il y avait eu 451 sièges à se répartir ?

Corrigé de cet exercice :

Somme des suffrages = 90'000 + 7900 + 1606 + 494 = 100'000.

Quotient électoral = 100'000 : 450 = 223.

A 90'000 : 223 = 403,59 --> A obtient 403 sièges

B 7900 : 223 = 35,43 --> B obtient 35 sièges

C 1606 : 223 = 7,20 --> C obtient 7 sièges

D 494 : 223 = 2,22 --> D obtient 2 sièges

Finalement, A obtient 404 sièges, B en a 36, C en reçoit 7 et D en acquiert 3.

447 sièges sont attribués. Au plus fort reste, ce sont les partis A, B et D qui obtiennent chacun un siège supplémentaire.

Reprenons nos calculs avec 451 sièges.

Quotient électoral = 100'000 : 451 = 222.

A 90'000 : 222 = 405,41 --> A obtient 405 sièges

B 7900 : 222 = 35,59 --> B obtient 35 sièges

C 1606 : 222 = 7,23 --> C obtient 7 sièges

D 494 : 222 = 2,23 --> D obtient 2 sièges

Finalement, A obtient 406 sièges, B en a 36, C en reçoit 7 et D en acquiert 2.

449 sièges sont attribués. Au plus fort reste, ce sont les partis A et B qui obtiennent chacun un siège supplémentaire.

Etonnamment, avec 451 sièges à répartir, D a un siège de moins que dans le cas d'une répartition de 450 sièges.

Cet exercice est une illustration du paradoxe de l'Alabama (une augmentation du nombre de sièges à distribuer peut conduire à perdre des sièges pour certains partis).

L'étude de la répartition des sièges au système proportionnel est riche d'enseignement et a permis de fructueuses discussions dans mes classes.

3 *Cet exercice a pour but de préparer l'exercice 3.*