Élaboration et expérimentation d'une situation d'enseignement portant sur l'équivalence des fractions ; le cas du premier scénario

Virginie Houle, Jacinthe Giroux

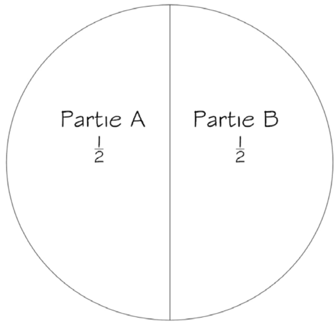
Professeures, Département d'éducation et formation spécialisées, Université du Québec à Montréal

L'enseignement de l'équivalence des fractions s'appuie généralement sur le fait que deux fractions sont équivalentes si elles permettent de relever la même part d'un tout continu de référence. Or, cette méthode d'enseignement permet difficilement d'appréhender la structure multiplicative de la fraction (Charalambous et Pitta-Pantazi, 2007). Dans le cadre d'un projet de recherche, nous avons élaboré une situation qui permet d'enrichir la notion d'équivalence par la prise en compte des relations multiplicatives entre différentes parties d'un même tout. La situation (composée de cinq scénarios) a été expérimentée auprès de trois groupes composés chacun de trois élèves âgés de 11-12 ans considérés en difficulté par leur enseignant. Dans cet article, nous expliquons d'abord en quoi consiste la situation en décrivant plus particulièrement le premier scénario de celle-ci, et nous présentons ensuite les stratégies mises en œuvre par les élèves ainsi que les variables didactiques de la situation qui assurent leur progression dans l'acquisition de la notion de fractions équivalentes.

Description de la situation

L'élaboration de notre situation s'inspire de la notion de situation adidactique telle que définie dans la *Théorie des situations didactiques* (Brousseau, 1998). L'enjeu mathématique principal de la situation est la notion de fractions équivalentes qui, elle-même, renvoie à la structure multiplicative de la fraction. Les élèves sont ainsi amenés à établir la relation multiplicative entre une fraction 1/b et une fraction c/d, où b est multiple de d. Le but poursuivi par les élèves est d'identifier le nombre de pièces, dont l'aire correspond à 1/b d'une figure, nécessaire pour recouvrir c/d de cette figure.

La situation est composée de cinq scénarios. Pour permettre au lecteur de bien saisir l'enjeu de la situation, nous présentons le premier scénario. Il se divise en deux sous-scénarios, soit 1a et 1b. Au scénario 1a, sont remis aux élèves un disque partitionné en deux parties d'aires égales ainsi qu'un bon de commande (voir figure 1).



Partie A : J'ai besoin de ____ pièces de 1/4 du disque pour recouvrir 1/2 disque.

Partie B : J'ai besoin de ____ pièces de 1/6 du disque pour recouvrir 1/2 disque.

Figure 1 : Matériel du scénario 1a

Les élèves doivent s'entendre sur le nombre de pièces correspondant à 1/4 du disque, et ensuite à 1/6 du disque, nécessaire pour recouvrir 1/2 disque. Ils complètent le bon de commande et le remettent à l'expérimentatrice. Elle remet ensuite aux élèves les pièces qu'ils ont commandées. En superposant les pièces reçues sur la partie de la figure à recouvrir, les élèves reçoivent une rétroaction sur la prévision qu'ils ont formulée par leur bon de commande.

Au scénario 1b, les élèves reçoivent une nouvelle figure, soit un rectangle partitionné en deux parties d'aires égales. Tout comme au scénario 1a, la fraction 1/2 est inscrite dans chacune des parties. Les élèves reçoivent également un bon de commande. Ils doivent maintenant s'entendre sur le nombre de pièces correspondant à 1/8 du rectangle, et ensuite à 1/12 du rectangle, pour recouvrir 1/2 de ce rectangle. Le scénario 1b se distingue ainsi du précédent par les valeurs attribuées à la variable « figure » (scénario 1a : disque ; scénario 1b : rectangle) et à la valeur de b dans 1/b qui est plus élevée (scénario 1a : 4 et 6 ; scénario 1b : 8 et 12).

Pour favoriser la décontextualisation des connaissances, l'expérimentatrice remet finalement aux élèves un tableau qu'ils doivent compléter. Notons que le nombre de pièces de 1/20 pour obtenir 1/2 ne peut être identifié en s'appuyant sur les figures traitées précédemment.

Nombre de pièces	Fractions de la pièce à commander	Fraction du tout à construire
	1/4	1/2
	1/6	1/2
	1/8	1/2
	1/12	1/2
	1/20	1/2

L'exercice vise à dégager que a pièces de 1/b permet de recouvrir a/b du tout (a × 1/b = a/b) et que a/b = 1/2. Il vise ainsi à reconnaître qu'il y a plusieurs écritures équivalentes à 1/2 et, plus particulièrement, à reconnaître que chaque fois que le numérateur correspond à la moitié du dénominateur, il s'agit d'une écriture équivalente à 1/2. Pour ce faire, l'écriture mathématique est utilisée de façon, d'une part, à dégager, dans ce que les élèves ont fait, ce qui relève du savoir mathématique et, d'autre part, à favoriser l'identification de régularités mathématiques. Par exemple, la relation entre le recouvrement de 1/2 disque à partir de 2 pièces de 1/4 du disque et l'écriture 2 × 1/4 = 2/4 = 1/2 est établie. Les fractions ainsi produites sont ensuite mises en relation en s'appuyant sur une propriété de l'égalité, la transitivité : si A = B et A = C, alors B = C. Une liste de fractions équivalentes est alors produite : 1/2 = 2/4 = 3/6 = 4/8 = 6/12 = 10/20. Les élèves sont ensuite invités à trouver d'autres fractions équivalentes à 1/2. L'idée est que la notion d'équivalence soit établie à partir du rapport entre le numérateur et le dénominateur et ne soit pas seulement travaillée à partir de la règle × y/y (c'est-à-dire en multipliant le numérateur et le dénominateur par un même nombre). Cette règle est souvent transmise directement aux élèves pour qu'ils génèrent des fractions équivalentes. Ils appliquent alors le même opérateur scalaire entier au numérateur et au dénominateur (ex.: x 2) pour produire une liste de fractions équivalentes (ex.: 1/2 = 2/4 = 4/8) sans que soit interrogée la relation multiplicative entre le numérateur et le dénominateur (1 est la demie de 2 comme l'est 2 avec 4).

Les stratégies de résolution

Pour identifier le nombre de pièces (a) correspondant à 1/b d'une figure nécessaire pour recouvrir c/d de cette figure, trois types de stratégies sont mises en œuvre par les élèves. La stratégie A génère une prévision erronée alors que les stratégies B et C conduisent à une solution adéquate. Le jeu sur les variables est cependant pensé de façon à rendre la conduite B inefficace et, ainsi, à favoriser la conduite C, soit celle qui fait appel au savoir visé.

Stratégie A : Interpréter la fraction 1/b seulement au regard de c/d. Ainsi, l'élève interprète c/d comme le tout de référence. Par exemple, au scénario 1a, les élèves vont commander 4 pièces de 1/4 du disque pour recouvrir 1/2 disque.

Stratégie B : Partitionner « mentalement » la figure pour identifier la relation multiplicative entre 1/b et c/d. L'élève tente alors de partitionner la figure en b parties égales pour ensuite identifier le nombre de 1/b dans c/d. Par exemple, au scénario 1a, les élèves vont partitionner le disque en 4 parties égales pour identifier le nombre de pièces de 1/4 nécessaire pour recouvrir 1/2 disque.

Stratégie C : Établir la relation multiplicative d'un point de vue numérique entre 1/b et c/d de manière à ce que a × 1/b = c/d. Cette interprétation conduit à prendre en compte la relation multiplicative entre 1/b et c/d pour identifier a. Par exemple, au scénario 1a, les élèves vont établir que 2 x 1/4 = 1/2.

Notons que les stratégies B et C ne s'excluent pas nécessairement. En effet, la manifestation de la stratégie C peut s'accommoder, chez les élèves, d'une coordination avec la stratégie B, permettant ainsi de se représenter la partition mentale qui correspond aux relations numériques établies. De même, le recours à la stratégie B peut s'accompagner d'un certain contrôle des relations numériques engagées dans la partition mentale de la figure. Une conduite strictement numérique exigerait de contrôler les faits multiplicatifs permettant d'établir les relations numériques mais également l'abstraction des contraintes « figurales » auxquelles se rapporte la tâche. Enfin, nous considérons que les élèves adoptent la stratégie B lorsqu'ils cherchent à partitionner la figure (par exemple, en utilisant leur doigt) et qu'il s'agit de la stratégie C lorsqu'ils anticipent rapidement et correctement la solution au problème.

Nos résultats montrent que les conduites des élèves évoluent à l'intérieur de chacun des scénarios. Par exemple, au scénario 1a, pour identifier le nombre de pièces de 1/4 du disque, et ensuite de 1/6 du disque, nécessaire pour recouvrir 1/2 disque, parmi les huit élèves présents, un élève met en œuvre la stratégie A, cinq élèves adoptent la stratégie B et un élève répond rapidement « 2 », ce qui suggère qu'il adopte la stratégie C. Enfin, un élève ne fait aucune prévision. Au scénario 1b, pour identifier le nombre de pièces de 1/8 d'un rectangle, et ensuite de 1/12, nécessaire pour recouvrir 1/2 rectangle, aucun élève n'adopte la stratégie A, deux élèves adoptent la stratégie B, cinq élèves adoptent la stratégie C et un élève ne se prononce pas. Il y a ainsi, entre les scénarios 1a et 1b, une grande diminution de la stratégie B au profit de la stratégie C. Ce changement relève, selon nous, de l'apprentissage réalisé au cours du scénario 1a ainsi que du choix de la valeur des fractions, soit 1/8 et 1/12. En effet, le partitionnement « mental » de la figure en 8 ou en 12 parties égales s'avère peu efficace comme stratégie. Cependant, la forme de la figure ne semble pas affecter les conduites, car le choix d'un rectangle, figure plus facile à partitionner qu'un disque, aurait pu au contraire encourager les élèves à recourir à la stratégie B.

Les variables didactiques de la situation

Le jeu sur les valeurs des variables didactiques augmente progressivement le niveau de difficulté des scénarios. Les variables didactiques de notre situation sont les suivantes.

- La valeur de 1/b

La fraction 1/b correspond à l'aire de la pièce à commander. Plus la valeur de b augmente, plus la stratégie B s'avère lourde. Il est, par exemple, plus coûteux de partitionner mentalement une figure en 12 parties égales qu'en 4 parties égales.

- La valeur de c/d

La valeur de c/d, soit la partie de la figure à recouvrir, correspond au premier scénario à 1/2. Dans les scénarios suivants, la valeur de d dans c/d augmente (ex. : 1/3, 1/5), et, aussi, il y a présence de fractions non unitaires (2/3, 4/5). La valeur de c/d est pensée en articulation avec la valeur de 1/b, de façon à ce que b soit multiple de d (ex. : le dénominateur de 1/6 est un multiple du dénominateur de 1/2).

- Le choix de la figure

Certaines figures sont plus difficiles à partitionner que d'autres. Prenons, par exemple, l'énoncé suivant : il faut ___ pièces de 1/20 d'un pentagone pour recouvrir 1/5 du pentagone. Les élèves qui tentent de recourir à la stratégie B rencontrent alors des difficultés, ne sachant comment partitionner un pentagone en 20 parties égales.

- Ce qui est recherché : le nombre de pièces à commander ou la fraction inscrite sur la pièce à commander

Au lieu de rechercher le nombre de pièces à commander, la tâche peut exiger de rechercher la fraction de la pièce à commander. C'est le cas, par exemple, de l'énoncé suivant : il faut 2 pièces correspondant à ___ du rectangle pour recouvrir 1/3 de ce rectangle.

- La présence ou non de la figure

Le travail peut être strictement numérique. La présentation de la figure succède alors au travail numérique et sert uniquement à la validation des relations établies par les élèves. Nous avons joué sur cette variable au dernier scénario de la situation. Ce scénario, contrairement aux précédents, ne met en jeu aucune situation de communication. Ainsi, la tâche consiste à compléter le tableau suivant :

Nombre de pièces	Fraction de la pièce à commander	Fraction du tout à construire
	1/12	1/3
	1/20	1/5
	1/10	2/5
	1/30	1/15

Autrement dit, au terme de la situation, le travail se fait strictement sur le plan numérique. En effet, les élèves ne disposent d'aucun matériel ; ils ne peuvent donc pas partitionner mentalement la figure. Lors de ce scénario, soit les élèves ont recours à une stratégie numérique correcte, soit ils ne peuvent mettre en œuvre une stratégie de solution. Ainsi, lorsque les élèves saisissent l'enjeu mathématique et ont construit, à l'aide du matériel, une situation de référence, le retrait du matériel favorise l'élaboration de stratégies numériques. L'expérimentation que nous avons menée nous informe cependant que certains élèves ne peuvent toujours pas établir les relations multiplicatives nécessaires sans s'appuyer sur du matériel. Pour ces élèves, il est donc possible que les relations mathématiques travaillées dans les scénarios précédents n'aient pas encore fait l'objet d'une abstraction. Les relations ne sont pas dégagées du matériel ; autrement dit, le matériel semble être ce par quoi ces relations existent.

Conclusion

La situation permet, en raison de sa dimension adidactique (Salin, 2007), un fonctionnement relativement autonome de la part des élèves, qui sont fortement engagés dans la recherche de solutions. Ce résultat est fort intéressant dans la mesure où plusieurs études mettent en évidence la difficulté d'obtenir un réel investissement cognitif auprès d'élèves en difficulté. En effet, les élèves qui ont participé à notre étude, recherchent activement des solutions aux problèmes et sont dans l'expectative de la rétroaction du milieu. Lorsque l'expérimentatrice leur remet les pièces et qu'ils reçoivent une rétroaction, ils tentent de comprendre ce qui fonde le résultat. C'est le cas, notamment, d'élèves qui s'exclament en déclarant : « Je ne pensais pas que les pièces seraient aussi grosses ! » ou encore « Ha ! Là je comprends, le prochain je vais l'avoir ! ».

Nous avions aussi prévu, dans notre étude, une articulation entre des moments d'adidacticité et des phases d'institutionnalisation pour inscrire, tel que prévu dans la Théorie des situations didactiques (Brousseau, 1998), la situation adidactique dans une situation didactique et ainsi favoriser l'appropriation de la notion d'équivalence de fractions. En effet, régulièrement au cours de la situation, les écritures mathématiques qui modélisent les actions des élèves ont été dégagées. L'expérimentatrice s'appuyait, à l'oral, sur la situation d'action pour donner du sens aux relations mathématiques qui, elles, ont été écrites. Mentionnons, pour terminer, que d'autres situations didactiques, convoquant des interprétations variées de la fraction (mesure, rapport, opérateur, quotient) ont été réalisées dans le but d'élargir le caractère d'utilité des connaissances élaborées par les élèves dans le cadre de cette première situation (Conne, 1992 ; Kieren, 1989 ; Giroux 2013).

Références

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques.* Grenoble : La pensée sauvage.

Charalambous, Y., Pitta-Pantazi, D. (2007). Drawing on a theoretical model to study students understandings of fractions. *Educational Studies in Mathematics,* 64(3), 293-316.

Conne, F. (1992). Savoir et connaissance dans la perspective de la transposition didactique. *Recherches en didactiques des Mathématiques,* 12(2), 221-270.

Giroux, J. (2013). Étude des rapports enseignement/apprentissage des mathématiques dans le contexte de l'adaptation scolaire : Problématique et repères didactiques. *Éducation et didactique,* 7(1), 59-86.

Kieren, T.E. (1989). Personal knowledge of rational numbers: its intuitive and formal development. Dans J. Hiebert et M. Behr. (ed.) *Number concepts and operations in the middle grades.* Reston (pp. 162-181). Virginia: Editions Lawrence Erlbaum.

Salin, M.-H. (2007). À la recherche de milieux adaptés à l'enseignement des mathématiques pour des élèves en grande difficulté scolaire. Dans J. Giroux et al. (dir.), *Difficultés d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques* (pp. 195-218). Montréal : Éditions Bande didactique.