

# LE KASAN KUROSU OU LE JEU DES SOMMES CROISÉES

(PARTIE 2)<sup>1</sup>

Valentina Celi

Université de Bordeaux - IUFM d'Aquitaine - LACES, E3D

Le Kasan Kurosu est un casse-tête qui, importé en 1980 des États-Unis, est toujours en vogue au Japon. Sous le nom de Kakuro, il n'est arrivé en Europe qu'en 2005. Dans ce texte, suite de l'article publié dans le n° 219 de Math-École (pp. 16-22), nous présentons quelques compléments. Après avoir rappelé les règles du jeu, nous proposons une variante et puis un exercice guidé ; nous terminons en offrant au lecteur quelques grilles à remplir.

## UNE CURIEUSE SYMÉTRIE (SOLUTION DU NUMÉRO 219)

Dans l'article publié dans le n° 219 de cette revue, nous avons proposé au lecteur de déterminer toutes les séries possibles de deux cases ( $n=2$ ) correspondant à  $N$  (entier naturel) qui varie entre 6 et  $15^2$ .

Nous les présentons dans le Tableau 1 en complétant la liste avec  $N = 3, 4, 16, 17$  à qui correspondent des séries uniques de deux cases.

Remarquons que cette liste présente une curieuse symétrie ! En effet, si l'on considère les séries (en termes de combinaisons), une symétrie analogue apparaît dans l'intervalle  $2 \leq n \leq 7^3$ .

1 La première partie de cet article est parue dans le numéro 219.

2 Précisons qu'ici nous considérons les séries en termes de combinaisons. A partir de celles-ci, si l'on veut avoir tous les arrangements, on considère les permutations possibles de deux éléments.

3 Nous rappelons au lecteur que les séries de huit et neuf cases correspondant respectivement aux nombres 8 et 9 sont uniques. Ces séries ne rentrent pas dans le jeu de symétries mises en évidence, cela à cause du fait que, dans une série, les nombres (à un chiffre) sont non nuls et ne peuvent pas se répéter.

$N \setminus n$	2	
3	1-2	Série unique
4	1-3	Série unique
5	1-4 ; 2-3	Deux séries
6	1-5 ; 2-4	Deux séries
7	1-6 ; 2-5 ; 3-4	Trois séries
8	1-7 ; 2-6 ; 3-5	Trois séries
9	1-8 ; 2-7 ; 3-6 ; 4-5	Quatre séries
10	1-9 ; 2-8 ; 3-7 ; 4-6	Quatre séries
11	2-9 ; 3-8 ; 4-7 ; 5-6	Quatre séries
12	3-9 ; 4-8 ; 5-7	Trois séries
13	4-9 ; 5-8 ; 6-7	Trois séries
14	5-9 ; 6-7	Deux séries
15	6-9 ; 7-8	Deux séries
16	7-9	Série unique
17	8-9	Série unique

Tableau 1

Notamment, en désignant par  $N_n$  le nombre auquel correspond une série de  $n$  cases et par  $S_n$  le nombre de séries de  $n$  cases, nous indiquons dans le Tableau 2 ce que l'on obtient<sup>4</sup>.

## LES RÈGLES DU KAKURO : UNE VARIANTE

Pour remplir une grille de Kakuro, il faut respecter les deux règles suivantes :

**Règle 1.** Il s'agit de placer les nombres de 1 à 9 (le zéro est exclu) dans une série de cases blanches, un seul nombre par case. La somme de ces nombres est égale au nombre figurant dans la demi-case colorée correspondante<sup>5</sup>.

**Règle 2.** Tous les nombres de 1 à 9 sont utilisables mais, dans une série, un nombre n'apparaît qu'une seule fois.

De plus en plus intriguée par le Kakuro, lorsque nous étions à la recherche de grilles

4 Comme nous pouvons le lire dans la partie 1 de l'article (Math-Ecole n°219), les séries de deux cases ne correspondent qu'aux nombres 3 à 17 ; les séries de trois cases ne correspondent qu'aux nombres 6 à 24 ; les séries de quatre cases ne correspondent qu'aux nombres 10 à 30 ; etc.

5 Par la suite, pour ne pas alourdir le texte, nous serons amenés à identifier la demi-case colorée avec le nombre figurant dans celle-ci.

$N_2$ (15)	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	18						
$S_2$ (36)	1	1	2	2	3	3	4	4	4	3	3	2	2	1	1						
$N_3$ (19)	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24		
$S_3$ (84)	1	1	2	3	4	5	7	7	8	8	8	7	7	5	4	3	2	1	1		
$N_4$ (21)	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
$S_4$ (126)	1	1	2	3	5	6	8	9	11	11	12	11	11	9	8	6	5	3	2	1	1
$N_5$ (21)	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35
$S_5$ (126)	1	1	2	3	5	6	8	9	11	11	12	11	11	9	8	6	5	3	2	1	1
$N_6$ (19)	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39		
$S_6$ (84)	1	1	2	3	4	5	7	7	8	8	8	7	7	5	4	3	2	1	1		
$N_7$ (15)	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42						
$S_7$ (36)	1	1	2	2	3	3	4	4	4	3	3	2	2	1	1						

Tableau 2

à remplir, nous en avons trouvé des nouvelles mais, dans ce cas-là, aux deux règles énoncées ci-dessus s'en ajoute une troisième, à savoir :

**Règle 3.** La même série de nombres n'est utilisable qu'une fois par grille.

Par exemple, pour remplir une série de deux cases correspondant à une demi-case colorée contenant le nombre 8, on peut utiliser 1 et 7 ou 2 et 6 ou encore 3 et 5. Supposons que, dans une grille, le 8 apparaît dans deux demi-cases colorées et que les deux séries correspondant sont constituées de deux cases. Si, dans l'une des deux séries, les nombres 1 et 7 ont déjà été utilisés, il ne reste que deux possibilités dans l'autre (soit, 2 et 6 soit, 3 et 5).

Considérons les grilles où, pour les compléter, on doit respecter simultanément les règles 1, 2 et 3 énoncées ci-dessus.

A. Dans une telle grille, combien de fois le 9 peut-il figurer dans une demi-case correspondant à une série de deux cases ? Et dans une demi-case correspondant à une série de trois cases ?

B. Compte tenu de l'existence de séries uniques, quelles conséquences sur la conception de telles grilles ? Par exemple,

peut-on compléter la Grille 1 en respectant les trois règles<sup>6</sup> ?

	1	2	3	4	5	6
A			11	4		
B		5			10	
C	17					3
D	6			4		
E		10				
F			3			

Grille 1

<sup>6</sup> La Grille 1 apparaît aussi dans la partie 1 de cet article (Math-Ecole n°219, p. 17). La solution de la grille et les réponses aux questions sont fournies ici en Annexe I.

## UN EXERCICE GUIDÉ : UNE GRILLE À COMPLÉTER

Avant de poursuivre la lecture, nous vous invitons à déterminer :

- toutes les séries possibles correspondant à 21 et 22 lorsque  $n=3$  ;
- toutes les séries possibles correspondant à 33 lorsque  $n=5$  ;
- toutes les séries possibles correspondant à 9 lorsque  $n=2$  et  $n=3$  ;
- toutes les séries possibles correspondant à 10 et 11 lorsque  $n=2$ .

Rappelons que le 15 correspond à la série de cinq cases unique  $1+2+3+4+5$  ; le 6 correspond à la série de trois cases unique  $1+2+3$ .

Un joueur veut compléter la Grille 2 (6×4) suivante :

	21	6	10	9	22
15					
33					
11			9		

Grille 2

a) Dans deux demi-cases colorées, on a respectivement le 22 correspondant à une série de trois cases et le 15 correspondant à une série de cinq cases : dans leur case commune, pourquoi le joueur a-t-il placé le 5 ?

b) Dans deux demi-cases colorées, on a respectivement le 6 correspondant à une série de trois cases et le 33 correspondant à une série de cinq cases : dans leur case commune, pourquoi le joueur a-t-il placé le 3 ?

	21	6	10	9	22
15					5
33		3			
11			9		

Grille 2. 1

c) Après avoir complété la série correspondant à la demi-case colorée contenant le 22, le joueur place le 4 et le 9 comme indiqué dans la Grille 4. Expliciter le raisonnement qui conduit le joueur à placer ces deux nombres de cette façon et compléter cette série avec le nombre manquant.

	21	6	10	9	22
15	4				5
33		3			
11	9		9		

Grille 2. 2

d) Pour compléter la série correspondant au 33, il ne reste maintenant que deux nombres à placer. Lesquels ?

e) Terminer la grille avec les nombres manquants. Vous pourrez vérifier la solution en Annexe II.

## ET MAINTENANT, À VOUS DE JOUER !

Sans vous fournir d'aides, nous vous proposons ici deux grilles à compléter. Vous repérez sans difficulté les détails permettant de distinguer les grilles où l'on n'utilise que les règles 1 et 2 de celles où l'on utilise aussi la règle 3. Les solutions se trouvent en Annexe III.

	22	6		4	16	5
10			14			
26			22			
9				22	10	
	17	3	24			5
31						
10			8			

Grille 3 (7x7)

	6	33	11		22	16	
22				13			21
10				8			
	13				15		
9	7				13		
			12				
12			27				

Grille 4 (8x6)

## UN PEU D'AUDACE !

La ressemblance du Kakuro avec les mots croisés nous a encouragée à imaginer des grilles où des séries doivent être déterminées, d'autres sont partiellement données et – c'est là l'originalité ! – certains des nombres qui figurent dans les cases colorées sont aussi à trouver suivant des indices fournis.

En respectant les trois règles, nous vous proposons enfin de compléter la Grille 5 que

nous avons créée dans sa totalité. La solution se trouve en Annexe IV.

		12		10	16	28	7
			1				
5		1			9		1
14	9			1			
							1
	3						
	8				9		
15		1				1	

Grille 5 (8x8 avec indices)

**INDICES.** En excluant les cases colorées de la première ligne (en partant du haut) et de la première colonne (en partant de gauche), parmi les onze cases colorées vides :

- une case reste complètement vide ;
- quatre cases sont remplies dans la partie supérieure et inférieure avec les nombres suivant : 3, 5, 11(2), 13(2), 17(2), 20(3), 21(6) et 22(4) ;
- quatre cases sont remplies dans la partie supérieure avec les nombres suivants : 4, 8(3) et 23(4), 25(5) ;
- deux cases sont remplies dans la partie inférieure avec les nombres suivants : 11(4) et 14(3).

A côté de chaque nombre supérieur ou égal à 6, le nombre entre parenthèse indique la longueur de la série qui lui correspond.

ANNEXE I - SOLUTION GRILLE 1

	1	2	3	4	5	6
A			11	4		
B		5	2	3	10	
C	17	9	5	1	2	3
D	6	5	1	4	3	1
E		10	3	1	4	2
F			3	2	1	

A propos des grilles où l'on utilise les trois règles

Réponses aux questions A et B (p. 21)

A. Nous avons déjà vu que les séries de deux cases correspondant à 9 sont : 1-8, 2-7, 3-6, 4-5. Le 9 peut donc figurer quatre fois.

Les séries de trois cases correspondant à 9 étant trois (1-2-6, 1-3-5, 2-3-4), le 9 ne peut figurer que trois fois.

B. Dans des telles grilles, les nombres correspondant à des séries uniques ne peuvent figurer qu'une seule fois. La Grille 1 peut être complétée en respectant seulement les règles (1) et (2) car le 3, le 4 et le 10 figurent dans plusieurs demi-cases colorées alors qu'ils correspondent à des séries uniques.

Finalement, en imposant les trois règles, on peut concevoir des grilles dont la taille est moins importante que celle des grilles où l'on n'impose que les règles (1) et (2). Néanmoins, le recours aux trois règles peut représenter une aide. Dans une grille où le 5 figure dans deux demi-cases colorées, si la série 1-4 a déjà été utilisée, on saura que pour l'autre il faudra inévitablement utiliser la série 2-3.

ANNEXE II - SOLUTION GRILLE 2

	21	6	10	9	22
15	4	1	3	2	5
33	8	3	7	6	9
11	9	2	9	1	8

a) La série de cinq cases correspondant à 15 est 1-2-3-4-5 (série unique). Les séries de trois cases correspondant à 22 sont 5-8-9 et 6-7-9. Pour que ces deux nombres aient une case commune, il faut choisir la série 5-8-9 correspondant à 22 : les deux séries ont ainsi le 5 en commun.

b) Les séries de cinq cases correspondant à 33 sont : 3-6-7-8-9 et 4-5-7-8-9. La série de trois cases correspondant à 6 est : 1-2-3. Pour que ces deux nombres aient une case commune, il faut choisir la série 3-6-7-8-9 correspondant à 33 car, de cette manière les deux séries ont le 3 en commun.

c) Pour compléter la série correspondant au 22, il reste à placer le 8 et le 9 comme indiqué ci-contre. La case D6 est commune aux nombres 22 et 9 : parmi les séries de deux cases correspondant au 9 (1-8, 2-7, 3-6 et 4-5), seule la série 1-8 est possible.

Le 21 et le 15 ont une case commune (B2). Pour le 21, on peut utiliser l'une des séries suivantes : 4-8-9, 5-7-9 ou 6-7-8. Toutefois, pour le 15, il ne reste qu'à placer le 1, le 2, le 3 et le 4. Cela oblige à choisir la série 4-8-9 et à placer le 4 dans la case B2.

Le 21 et le 11 ont une case commune (D2). Les séries possibles pour le 11 sont : 2-9, 3-8, 4-7, 5-6. Pour compléter la série correspondant au 21, il ne reste qu'à placer le 8 et le 9. Si l'on plaçait le 8 dans la case D2, la série du 11 se compléterait avec un 3 dans la case D3, ce qui est impossible puisque, dans la troisième colonne le 3 apparaît déjà dans la case C3. Cela oblige à placer le 9 et le 8 respectivement dans les cases D2 et C2.

d) Pour compléter la série correspondant au

33, il ne reste qu'à placer le 6 et le 7. Dans la cinquième colonne, il faut compléter une série correspondant au 9 (A5) : si l'on plaçait le 7, elle se compléterait par deux 1, ce qui est impossible. Il faut donc placer le 7 et le 6 respectivement dans les cases D4 et D5. f) (cf. ci-contre la grille complétée).

ANNEXE III - SOLUTION GRILLES 3 ET 4

	22	6		4	16	5
10	7	3	14 22	3	9	2
26	9	2	4	1	7	3
9	6	1	2	22	10	
	17	3 24	9	8	7	5
31	8	2	7	9	1	4
10	9	1	8	5	2	1

Grille 3

Dans ce jeu on tient compte des trois règles

	6	33	11		22	16	
22	5	9	8	13	9	4	21
10	1	7	2	8 22	3	1	4
	13 7	3	1	9	15 13	6	9
9	3	6	12	5	4	2	1
12	4	8	27	8	9	3	7

Grille 4

Dans ce jeu on ne tient compte que des règles (1) et (2) : on utilise la même série de

trois cases correspondant à 22 qui figure 2 fois dans la grille.

ANNEXE IV - SOLUTION DE LA GRILLE 5

		12		10	16	28	7
	21 13	2	1	3	4	5	6
5	4	1	23	6	9		1
14	9	5	8	1	3	4	11
	11 20	4	7	14	3 17	2	1
	3		22 5	6	8	3	5
	8	25	3	5	9	6	2
15	9	11	2	3	4	1	3